1) Вероятностное пр-во. Операции над событиями. Св-ва вероятности

Опр Пр-во элемент. исходов Ω – $\forall$ непустое мн-во, содерж всевозмож результаты случ. эксперим. Элементы $\omega \in \Omega$ – элемент. исходы.

Опр. Алгебра $\mathcal{A}$ – мн-во подмножеств Ω, облад. след св-вами:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ (по инд: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i}^{n} A_i \in \mathcal{A}$)

Опр σ-алгебра $\mathcal{F}$ – мн-во подмн. Ω, облад след св-вами:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
- $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Опр Случ событие A – элемент σ-алгебры $\mathcal{F}$, т.е некотор подмн-во элем иск.
$A = \varnothing$ – невозмож. событ, $A = \Omega$ – достоверн. событ.

Операции над событиями:

- Объединение $A \cup B$ – происх A или B, или оба
- Пересечение $A \cap B$ (или AB) – происх A и B вместе. Если $AB = \varnothing$, то события несовместимы
- Разность $A \setminus B$ – происходит A и не происходит B
- Симм. разн. $A \triangle B$ – либо $A \setminus B$, либо $B \setminus A$

Опр σ-алгебра порождена классом K, если она является пересеч. всех σ-алгебр, содерж K, т.е явл миним. σ-алгеброй, содерж K

Опр Вероятность – ф-ция $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, облад св-вами:

1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ (неотриц)
2) $P(\Omega) = 1$ (нормировка)
3) $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \quad A_{ij} = \varnothing$: $P(\cup A_i) = \Sigma P(A_i)$

Св-ва вероятности:

1) $P(\varnothing) = 0$:
$\triangleright$ $A_1 = \Omega, A_2 = \varnothing, \dots, A_n = \varnothing, \dots \Rightarrow \cup A_i = \Omega \Rightarrow P(\cup A_i) = P(\Omega) = 1$, но $A_i A_j = \varnothing \Rightarrow$ по (3) из опр
$\sum\limits_{i=2}^{\infty} P(\varnothing) = 0 \Rightarrow P(\varnothing) = 0$

2) $A, B \in \mathcal{F}, B \subset A \Rightarrow P(A) \geq P(B)$
$B \subset A \Rightarrow A = (A \setminus B) \cup B \Rightarrow \{(A \setminus B) \cup B = \varnothing\} \Rightarrow P(A) = P(A \setminus B) + P(B) \geq P(B)$

3) $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$
$A = (A \setminus B) \cup AB \Rightarrow P(A) = P(A \setminus B) + P(AB) \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
$A \cup B = (A \setminus AB) \cup B$. Очев, $(A \setminus AB) \cap B = \varnothing \Rightarrow P(AB) = P((A \setminus AB) \cup B) = P(A \setminus AB) + P(B)$
$P(A \setminus AB) = P(A) - P(AB)$
$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

есть ещё:

- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

• $P(A) \le 1$

• $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow P(\cup A_i) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i A_j) + \dots - \dots$

Опр Вероятностное пр-во – тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω-мн-во эл. исх, $\mathcal{F}$ – σ-алг. опр над Ω, вероятн. P опр над $\mathcal{F}$

Опр: Пусть $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – конеч. неп. мн-во, $\mathcal{F}$ – мн-во всех подмн. Ω. Положим $P(\{\omega_i\}) = p_i$. Это вероятн. пр-во – дискретное вероятн. пр-во $\forall A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ его вероят $P(A) = \sum p_{i_j}$ – классич. опр. вероят.

$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n \Rightarrow P(A) = k/n$, где $k = |A|$

② Статистич. структура. Выборка. Поряд. стат. Вариац. ряд. Выбороч. ф-ция распр. Св-ва

Опр: Стат. структура – совокуп. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}_\Theta)$, где $\mathbb{R}^n$ – выборочное пр-во, $\mathcal{B}^n$ – борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{P}_\Theta$ – семейство распределений, опред. на $\mathcal{B}^n$, параметриз. одно- или много-мерном числ. парам $\mathcal{P}_\Theta = (\mathbb{P}_\Theta : \Theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m)$

Опр: Выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ объема n – набор из n независ и одинаково распред СВ (случ. величин), имеющих такое же распред, как и наблюд. СВ

Опр: Статистика (или оценка) – измеримая ф-ция от выборки, не зависящая от $\forall$ др. парам: $T: \mathbb{R}^n \to \Theta$

Опр: Вариац. ряд – набор СВ $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$, который получ при упорядочивании выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ по возраст на кажд. эл. исходе.

Опр: Выборочн. мат ожид – $\tilde{E}_\xi = \sum_1^n \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n} \sum X_i = \overline{X}$; $\tilde{E}_{g(\xi)} = \frac{1}{n} \sum_1^n g(X_i) = \overline{g(X)}$

Опр: Выборочн. дисперс – $\tilde{D}_\xi = \sum_1^n \frac{1}{n} (X_i - \tilde{E}_\xi)^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (X_i - \overline{X})^2 = S^2$

Опр: Несмещ. выбороч дисп – $S_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1} S^2$

Опр: Выборочная (эмпирич) ф-ция распр, постр. по выборке $X_1, \dots, X_n$ объема n – случ. ф-ция F_n^*: $F_n^*(y) = \frac{1}{n} \sum_1^n \mathbb{1}(X_i < y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$

Строится: $F_n^*(y) = \begin{cases} 0 & y \le X_{(1)} \\ k/n, & X_{(k)} < y < X_{(k+1)} \\ 1 & , y > X_{(n)} \end{cases}$

Св-ва выбороч. ф-ции:

1. Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ – выборка из семейства распр $\mathcal{P}_\Theta$ с ф-цией распр F_Θ и пусть F_n^* – эмпир. ф-ция распр, постр по этой выборке. Тогда $F_n^*(y) \xrightarrow[n\to\infty]{P} F_\Theta(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$ и $\forall \Theta \in \Theta$

▷ $F_{(n)}^*(y) = \frac{1}{n} \sum_1^n \mathbb{1}(X_i < y)$, при этом СВ $\mathbb{1}(X_1 < y), \mathbb{1}(X_2 < y) \dots$ нез и одинак распред. их мат ожид конечно:

$E_\Theta \mathbb{1}(X_1 < y) = 1 \cdot \mathbb{P}_\Theta(X_1 < y) + 0 \, \mathbb{P}_\Theta(X_1 \ge y) = \mathbb{P}_\Theta(X_1 < y) = F_\Theta(y) < \infty$

$\Rightarrow$ ЗБЧ (закон больш. чисел) в форме Хинчина

$$F_n^*(y) = \frac{\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} E_\theta \mathbb{1}(X_1<y) = F_\theta(y) \quad \forall \theta \in \Theta \quad \square$$

2. $\forall y \in \mathbb{R}$ и $\forall \theta \in \Theta$ вып:

1) $E_\theta F_n^*(y) = F_\theta(y)$ (т.е $F_n^*(y)$ - несмещ оценка для $F_\theta(y)$)

$\triangleright$ $E_\theta F_n^*(y) = E_\theta \frac{\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y)}{n} = \frac{\sum_1^n E_\theta \mathbb{1}(X_i<y)}{n} = \frac{n E_\theta \mathbb{1}(X_1<y)}{n} = F_\theta(y) \quad \square$

2) $D_\theta F_n^*(y) = \frac{F_\theta(y)(1-F_\theta(y))}{n} \le \frac{1}{4n}$

$\triangleright$ $\mathbb{1}(X_i<y)$ - незав и одинак распр $\Rightarrow D_\theta F_n^*(y) = D_\theta \frac{\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y)}{n} = \frac{\sum_1^n D_\theta \mathbb{1}(X_i<y)}{n^2} =$

$= \frac{n D_\theta \mathbb{1}(X_1<y)}{n^2} = \frac{F_\theta(y)(1-F_\theta(y))}{n}$

$F_\theta(y) \in [0,1] \Rightarrow F_\theta(y)(1-F_\theta(y)) \le \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \quad \square$

3) $\exists$ $\sigma^2(y) = (1-F_\theta(y))F_\theta(y) \Rightarrow \sqrt{n}(F_n^*(y) - F_\theta(y)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \sigma^2(y))$

(т.е $F_n^*(y)$ - асимптотич норм оценка для $F_\theta(y)$)

$\triangleright$ ЦПТ (центр. предельн. теор): $\sqrt{n}(F_n^*(y) - F_\theta(y)) = \sqrt{n}\left(\frac{\sum \mathbb{1}(X_i<y)}{n} - F_\theta(y)\right) =$

$= \frac{\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y) - nF_\theta(y)}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y) - nE_\theta \mathbb{1}(X_1<y)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, D_\theta \mathbb{1}(X_1<y)) = N(0, (1-F_\theta(y))F_\theta(y))$ $\square$

4) $nF_n^*(y) \sim Bi(n, F_\theta(y))$ биномиальн. распр

$\triangleright$ биномиальн. распр устойч по суммир: $\mathbb{1}(X_i<y)$ нез и $\sim Bi(1, F_\theta(y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow nF_n^*(y) = \mathbb{1}(X_1<y) + \dots + \mathbb{1}(X_n<y)$ имеет $Bi(n, F_\theta(y))$ $\square$

5) $F_n^*(y) \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} F_\theta(y)$

$\triangleright$ $\forall y \in \mathbb{R}$. $\xi_i = \mathbb{1}(X_i<y)$ - нез, одинак распр, $\exists E_\theta \xi_i = F_\theta(y) \Rightarrow$ УЗБЧ

(усиленный зак. больш. чисел) в ф Колмогорова $P_\theta(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum \xi_i = F_\theta(y)) = 1$

$\forall \theta \in \Theta$ $\square$

① Условная вероятность. Формула полной вероятн. Фрм. Байеса

Опр Пусть задано вер. пр-во $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, события $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$. Усл. вероятн. соб. A при событии B: $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ (вер. A, если произошло B)

Опр A и B – независ., если $P(AB) = P(A)P(B)$
$\Rightarrow P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$

Опр: Пусть даны события $A, B_1, \dots, B_n, \dots$; $P(B_i) > 0$, причем $B_i B_j = \varnothing$ и $\bigcup B_i \supset A$. Тогда справ. **Фор. Пол. Вер.** $P(A) = \sum_1^n P(B_i) P(A|B_i)$ (n м.б. ∞)

▷ $A = \bigcup (AB_i)$ и $AB_i \cap AB_j = \varnothing \Rightarrow P(A) = \sum P(AB_i) = \sum P(B_i) P(AB_i)/P(B_i) =$
$= \sum P(B_i) P(A|B_i)$ □

Опр Пусть даны соб. $A, H_1, \dots, H_n, \dots$; $P(A) > 0$, $P(H_i) > 0$, причем $H_i H_j = \varnothing$, $\bigcup H_i \supset A$. Тогда справ **фор. Байеса**: $P(H_i|A) = \dfrac{P(H_i) P(A|H_i)}{\sum_j P(H_j) P(A|H_j)}$

▷ $\dfrac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)} = \dfrac{P(H_i) P(AH_i)}{P(A) P(H_i)} = \dfrac{P(AH_i)}{P(A)} = P(H_i|A)$

② Полн. и дост. статистики. Теор. Колмогорова и Рао–Блекуэлла–Колмогорова об оптим. оценках

Опр Ф-ция правдоподобия выборки X: $L(X, \theta) = f_\theta(X_1) \dots f_\theta(X_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i)$
дискр: $L(X, \theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = P_\theta(X_1 = x_1) \cdot \ldots \cdot P_\theta(X_n = x_n) = P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$

Опр: Статистика $T(X)$ назыв. полной, если $\forall$ борелевской ф-ции $\varphi(T)$, для которой $E_\theta \varphi(T) = 0$ $\forall \theta \in \Theta$ справед.: $\varphi(T) \overset{п.н.}{=} 0$

Опр: Статистика $T(X)$ назыв. достаточной, если $\forall t \in \mathbb{R}^m$, $\forall B \in \mathcal{B}^n$ условн. распр $P_\theta((X_1, \dots, X_n) \in B / T = t)$ не завис. от параметра θ. Или: $T(X)$ дост, если $E_\theta(X | T(X))$ не завис от θ

Критерий факторизации:
$T(X)$ – дост статистика $\Leftrightarrow$ её ф-ция правдоподобия представима в виде: $L(X_1, \dots, X_n, \theta) \overset{п.н.}{=} g(T(X), \theta) \cdot h(X)$

▷ Д. только дискр. случай
(⇒) Пусть $T(X)$ – дост, x – произв. реализация, пусть $T(x) = t$
$L(x, \theta) = P_\theta(X = x) = P_\theta(X = x, T(X) = t) = \underbrace{P_\theta(T(X) = t)}_{g(T(X), \theta)} \cdot \underbrace{P_\theta(X = x | T(X) = t)}_{h(x)}$

$\Leftarrow$ $\exists L(x,\theta) = g(T(x),\theta)\cdot h(x) \Rightarrow$ если $x: T(x)=t$, то:

$P_\theta(X=x \mid T(X)=t) = \frac{P_\theta(X=x, T(X)=t)}{P_\theta(T(X)=t)} = \frac{P_\theta(X=x)}{\Sigma P(X=x')} = \frac{g(T(x),\theta)h(x)}{g(T(x),\theta)\Sigma h(x')} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не завис от $\theta \Rightarrow$ дост

Теор Рао–Блекуэлла–Колмогорова Если $\exists$ оптим оценка для $\tau(\theta)$, то она явл ф-цией от достаточн. статистики

▷ Докажем более сильное утв:

$\forall$ несмещ оценки можно построить новую оценку, являющуюся ф-цией от достат. стат, при этом дисперсия постр. оценки будет не больше исходной

1) Построим искомую статистику. $\exists T(X)$ – достат. статистика

$T_1(X)$ – несмещ оценка $\tau(\theta) \Rightarrow E_\theta T_1(X) = \tau(\theta)$

$\exists H(T) = E_\theta(T_1|T) \Rightarrow E_\theta H(T) = ET_1 = \tau(\theta) \Rightarrow H$ – несмещ $\tau(\theta)$

2) Покажем, что ее $D_\theta \le D_\theta$ (исход):

$D_\theta T_1 = E_\theta(T_1 - E_\theta T_1)^2 = E_\theta(T_1 - \tau(\theta) + H(T) - H(T))^2 = \underbrace{E_\theta(T_1 - H(T))^2}_{\geq 0} +$

$+ 2E_\theta\big((T_1 - H(T))(H(T) - \tau(\theta))\big)_{(*)} + D_\theta H(T)$

$(*)$: $E_\theta[(T_1 - H(T))(H(T) - \tau(\theta))] = E_\theta(E_\theta[(T_1 - H(T))(H(T) - \tau(\theta)) \mid T]) =$

$= E_\theta((H(T) - \tau(\theta))(E_\theta(T_1|T) - E_\theta(H(T)|T)) = 0 \Rightarrow D_\theta T_1 \geq D_\theta H(T) \Rightarrow$ если

$\exists$ опт. оценка T_1, то $H(T)$ – тоже опт оценка, но она единственна

$\Rightarrow H(T) = E_\theta(T_1|T) = f(T)$ ф-ция от дост статистики □

Теор. Колмогорова: $\exists T(X)$ – полная достаточн. статистика. $\exists \varphi(x)$ – борелевская ф-ция и $E_\theta \varphi(T(X)) = \tau(\theta) \Rightarrow \varphi(T(X))$ – опт оц для $\tau(\theta)$

▷ Из теор Рао–Блекуэлла–Колмогорова:

Если $\exists$ несмещ. оценка $\tau(\theta)$, то $\exists$ и несмещ. оценка $\tau(\theta)$, явл ф-цией от дост. стат

$\exists T_1 = \varphi_1(T)$ – несмещ. для $\tau(\theta)$, T – ПДС; $\exists \exists T_2 = \varphi_2(T)$ – также несмещ. оц $\tau(\theta)$

$\Rightarrow ET_1 = \tau(\theta) = E(T_2) \Rightarrow E(\varphi_1(T) - \varphi_2(T)) = E(\varphi_1(T)) - E(\varphi_2(T)) = 0$

Но T – полн $\Rightarrow \varphi_1(T) \overset{\text{п.н}}{=} \varphi_2(T)$

$\Rightarrow T_1 = T_2$ – ед. несмещ. оц. $\Rightarrow$ оптим □

① Независимость событий. Критерий независимости

Опр: A, B независ, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Опр: $A_1, \dots, A_n$ независ в совокуп, если $\forall k = \overline{2,n}, \forall i_1, \dots, i_k : 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ вып

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

Св-ва:

- $P(B|A) = P(B)$; $P(A|B) = P(A)$
- $\bar{A}$ и B, A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — также независимы

▷ $\bar{A}$ и B: $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A)P(B) + P(\bar{A}B) \Rightarrow P(\bar{A}B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(\bar{A})P(B)$

Ост - аналогично □

Обозн:

$$A_i^{(s)} = \begin{cases} A_i, & s = 1 \\ \bar{A}_i, & s = 0 \end{cases}$$

Критерий независимости: События $A_1, \dots, A_n$ независимы в совокупности, если $\forall s_1, \dots, s_n \in \{0, 1\}$ выполн. р-во:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{(s_i)}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i^{(s_i)})$$

② Проверка гипотез. Лемма Неймана - Пирсона

Опр: Статистическая гипотеза H - $\forall$ предположение о распред наблюд. случ. величин

Опр: Гипотеза наз простой, если в ней явно задаётся одно (не параметриз) распределение. Напр: $H: X_i \sim N(0,1)$. В прот случае гипотеза наз сложной

Опр: Обычно $\exists$ сразу 2 взаимоискл. гипотезы. Одна — основная и обозн H_0; другая — альтерн. и H_1

Опр: Критерий - это статистика $\varphi(X)$ (т.е измеримая ф-ция от выборки) со зн. из $[0,1]$. Трактуется как "вероятность" отвергнуть H_0. Если $\varphi(X) \overset{\text{п.н}}{\in} \{0,1\}$, то кр. наз нерандомиз, иначе - рандомиз).

Опр: Говорят, что произошла ошибка 1-го рода (false-positive), если крит. отверг. верн. гипот H_0. Вероятн. ош. 1-го рода:

$$\alpha(S) = P_\Theta(X \in S | H_0) = P_0(X \in S)$$

Аналогично вероятн. ош. 2-го рода (false negative)

$\beta(S) = P_\theta(X \notin S | H_1) = P1(X \notin S)$

Опр: Критер. наз несмещ, если выполн усл.: $1-\beta(S) \geq \alpha(S)$

Опр: Мощность критерия: $W(\theta, \varphi) = E_\theta \varphi(X) = \int\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) L(x, \theta) dx$

Лемма Неймана-Пирсона:

$\exists\ \alpha_0 \in (0,1)$. $\exists\ l(X) = \frac{L_1(X)}{L_0(X)} \Rightarrow$ при фикс вероятн ошибк 1-го рода α_0 наиб. мощ. критерий (НМК) имеет вид:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } l(X) > C \\ \varepsilon, & \text{если } l(X) = C \\ 0, & \text{если } l(X) < C \end{cases}$$

, где конст. C и ε явл. реш. ур-я "вероятн. ош. 1-го рода для этого крит. равна α_0": $\alpha(\varphi^*) = \alpha_0$

▷ 1) Покажем, что C и ε мб найдены из ур-я $\alpha(\varphi^*) = \alpha_0$. Заметим:

$\alpha(\varphi^*) = P_0(l(X) > C) + \varepsilon P_0(l(X) = C)$

Отнош правдоподобн. $l(X)$ – случ. величина. $\exists\ \eta = l(X)$.

$\exists\ F_{\eta, H_0}(x)$ – ф-ция распред этой велич. в предпол, что H_0 верно.

Тогда $\alpha(\varphi^*) = 1 - F_{\eta,H_0}(C) + \varepsilon(F_{\eta,H_0}(C) - F_{\eta,H_0}(C-0))$

$\exists\ g(C) = 1 - F_{\eta,H_0}(C)$. Константу C_{α_0} можно выбр. так, чтоб было выполнено: $g(C_{\alpha_0}) \leq \alpha_0 \leq g(C_{\alpha_0} - 0)$

Тогда:

$$\varepsilon_{\alpha_0} = \begin{cases} 0, & \text{если } g(C_{\alpha_0}) = g(C_{\alpha_0} - 0) \\ \dfrac{\alpha_0 - g(C_{\alpha_0})}{g(C_{\alpha_0} - 0) - g(C_{\alpha_0})} \in [0,1], & \text{если } g(C_{\alpha_0}) < g(C_{\alpha_0} - 0) \end{cases}$$

В обоих случ. выполн: $\alpha_0 = g(C_{\alpha_0}) + \varepsilon_{\alpha_0}(g(C_{\alpha_0} - 0) - g(C_{\alpha_0})) = \alpha(\varphi^*)$

2) Докажем, что $\varphi^*(x)$ – наиб. мощный критерий.

Выберем $\forall$ др. критерий $\tilde{\varphi}(x) : \alpha(\tilde{\varphi}) \leq \alpha_0$ и сравн ее с критер. $\varphi^*(x)$. Заметим, что $\forall\ x$ справедл. нер-во:

$(\varphi^*(x) - \tilde{\varphi}(x))(L_1(x) - C_{\alpha_0} L_0(x)) \geq 0$

Тогда $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*(x) - \tilde{\varphi}(x))(L_1(x) - C_{\alpha_0} L_0(x)) dx \geq 0$

Раскроем скобки и преобразуем:

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(x) L_1(x) dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(x) L_1(x) dx \geq C_{\alpha_0}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(x) L_0(x) dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(x) L_0(x) dx\right) \geq 0$

Верно т.к. $\alpha(\tilde{\varphi}) \leq \alpha_0 = \alpha(\varphi^*) \Rightarrow W(\theta_1, \varphi^*) - W(\theta_1, \tilde{\varphi}) \geq C_{\alpha_0}(\alpha(\varphi^*) - \alpha(\tilde{\varphi})) \Rightarrow$

$\Rightarrow W(\theta_1, \varphi^*) \geq W(\theta_1, \tilde{\varphi})$

$\square$

① Закон больших чисел в форме Хинчина. Центр. пред. теор.

ЗБЧ в форме Хинчина: $\forall$ посл $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независ и одинаково распр. сл. величин с конечн. первым моментом $E|\xi_1| < \infty$ вып:
$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}\xi_1$

D Лемма: Если $\xi_n \overset{w}{\Rightarrow} c = const$, то $\xi_n \xrightarrow{P} c$

D $\exists\ \xi_n \overset{w}{\Rightarrow} c$, т.е $F_{\xi_n}(x) \to F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \le c \\ 1, & x > c \end{cases}$

$\forall x$ - точк. непрерывн $F_c(x)$, т.е $\forall x \ne c$. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$ и докажем, что $P(|\xi_n - c| < \varepsilon) \to 1$:

$P(-\varepsilon < \xi_n - c < \varepsilon) = P(c - \varepsilon < \xi_n < c + \varepsilon) \geqslant P(c - \varepsilon/2 < \xi_n < c + \varepsilon) = F_{\xi_n}(c+\varepsilon) -$
$- F_{\xi_n}(c - \varepsilon/2) \to F_c(c+\varepsilon) - F_c(c - \varepsilon/2) = 1 - 0 = 1.$

Т.к. в т. $c+\varepsilon$ и $c - \varepsilon/2$ F_c непрер $\Rightarrow F_{\xi_n}(c+\varepsilon) \to F_c(c+\varepsilon) = 1$ и
$F_{\xi_n}(c - \varepsilon/2) \to F_c(c - \varepsilon/2) = 0$

Т.к $P(|\xi_n - c| < \varepsilon) \le 1$, то $P(|\xi_n - c| < \varepsilon) \to 1$ $\square$

Док-во теоремы: (надо показ слабую сходимость $\frac{S_n}{n}$ к a)

По теор о непрер. соотв сходим $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ вып: $\varphi_{S_n/n}(t) \to \varphi_a(t) =$
$= \mathbb{E}e^{ita} = e^{ita}$. Найдем хар ф-цию $\frac{S_n}{n}$: $\varphi_{S_n/n}(t) = \varphi_{S_n}(\frac{t}{n}) = (\varphi_{\xi_1}(\frac{t}{n}))^n$

$\exists\ E|\xi_1| < \infty \Rightarrow$ разложим $\varphi_{\xi_1}(t)$ в р.Тейлора в окр 0:

$\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + itE\xi_1 + \bar{o}(t) = 1 + ita + \bar{o}(t)$. В точке t/n:

$\varphi_{\xi_1}(\frac{t}{n}) = 1 + \frac{ita}{n} + \bar{o}(\frac{t}{n})$; $\varphi_{S_n/n}(t) = (\varphi_{\xi_1}(\frac{t}{n}))^n = (1 + \frac{ita}{n} + \bar{o}(\frac{t}{n}))^n$

при $n \to \infty$ восп. $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$:

$\varphi_{S_n/n}(t) = (1 + \frac{ita}{n} + \bar{o}(\frac{t}{n}))^n = (1 + \frac{ita}{n})^n + \bar{o}(\frac{t}{n})(\ldots) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} e^{ita}$ $\square$

Центр. предельн. теорема: $\exists\ \xi_1, \xi_2 \ldots$ - послед. незав. одинак распр невыр СВ с $E\xi_1^2 < \infty$ и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D $\exists\ E\xi_1 = m$, $D\xi_1 = \sigma^2$. $\exists\ X = \xi_1 - m$, $\varphi_X(t) = Ee^{itX}$

$\exists\ \varphi_n(t) = Ee^{it\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}} = \left[\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$. В силу разлож хар. ф-ции:

$\varphi_X(t) = 1 + itEX + \ldots + \frac{(it)^n}{n!}EX^n + R_n(t)$. Т.к. $EX = E[\xi_1 - m] = 0$ при $n=2$ получ:

$\varphi(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \bar{o}(t^2)$, $t \to 0$ $\Rightarrow \forall t$ при $n \to \infty$ $\varphi_n(t) = \left[1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + \bar{o}(\frac{1}{n})\right]^n \to e^{-t^2/2}$
хар для $N(0,1)$ $\square$

② Доверит. интервалы. Метод использ точной оценки

Опр: Доверит. инт. для парам θ с коэф доверия $\gamma \in (0,1)$ — инт $(T_1(X), T_2(X))$, где

T_i – статистики: 1. $T_1(X) \overset{п.н.}{\leq} T_2(X)$
2. $\mathbb{P}_\Theta(T_1(X) \leq \Theta \leq T_2(X)) \geq \gamma$

Опр: Центр. статистика – ф-ция $G(X,\Theta)$:

1. $G(X,\Theta)$ непр и строго монот по Θ $\forall$ фикс реализ выборки x
2. $F_G(t) \equiv \mathbb{P}_\Theta(G(X,\Theta) < t)$ непр и не завис от Θ

Построен. кратчайш доверит. инт с пом. центр. статистики.

1. Найдем $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}_\Theta(g_1 \leq G(X,\Theta) \leq g_2) = \gamma$ $\forall \Theta \in \Theta \Leftrightarrow F_G(g_2+0) - F_G(g_1) = \gamma$
2. $\exists G(X,\Theta) \nearrow$ по $\Theta \Rightarrow \exists G^{-1}(X,g)$, $\begin{cases} G(X,\Theta) \leq g_2 \\ G(X,\Theta) \geq g_1 \end{cases} \Rightarrow$ можно найти $T_1(X), T_2(X)$:

$\begin{cases} T_2(X): G(X, T_2(X)) = g_2 \\ T_1(X): G(X, T_1(X)) = g_1 \end{cases} \Leftrightarrow T_1(X) \leq \Theta \leq T_2(X) \Rightarrow \mathbb{P}_\Theta(T_1(X) \leq \Theta \leq T_2(X)) \geq \gamma$ $\forall \Theta \in \Theta$

3. $|G^{-1}(X,g_2) - G^{-1}(X,g_1)| = |T_2(X) - T_1(X)| \longrightarrow \min\limits_{F_G(g_2+0)-F_G(g_1) \geq \gamma}$

Опр: Центральн. довер. инт для пар Θ с коэф. довер $\gamma \in (0,1)$ – инт $(T_1(X), T_2(X))$:

$\mathbb{P}_\Theta(T_1(X) > \Theta) = \frac{1-\gamma}{2}$; $\mathbb{P}_\Theta(T_1(X) \leq \Theta \leq T_2(X)) = \gamma$; $\mathbb{P}_\Theta(T_2(X) < \Theta) = \frac{1-\gamma}{2}$

Постр. довер. инт с пом. точечной оценки

1) $\exists T(X)$ – точечная стат. Θ. $\exists F_T(t,\Theta) = \mathbb{P}_\Theta(T(X) < t)$ – непр., строго монот

Найдем t_1 и t_2 такие: $\mathbb{P}_\Theta(t_1(\Theta) \leq T(X) \leq t_2(\Theta)) \geq \gamma$

$\begin{cases} \mathbb{P}_\Theta(T(X) > t_2(\Theta)) \leq \frac{1-\gamma}{2} \\ \mathbb{P}_\Theta(T(X) < t_1(\Theta)) \leq \frac{1-\gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - F_T(t_2(\Theta), \Theta) \leq \frac{1-\gamma}{2} \\ F_T(t_1(\Theta), \Theta) \leq \frac{1-\gamma}{2} \end{cases}$

2) **Лемма** (для абс. непр. случая): Если $F_T(t,\Theta) \nearrow (\searrow)$ по Θ, то $t_1(\Theta)$ и $t_2(\Theta) \searrow (\nearrow)$

▷ Док-во для t_1 (для t_2 – аналогично): $\exists F_T(t,\Theta) \nearrow$. От противного:

$\exists \Theta_1 < \Theta_2$: $t_1(\Theta_1) \leq t_1(\Theta_2)$. $F_T(t,\Theta) \nearrow$ по Θ и $\forall$ ф-ция распр не уб по t:

$\frac{1-\gamma}{2} = F_T(t_1(\Theta_1), \Theta_1) < F_T(t_1(\Theta_1), \Theta_2) \leq F_T(t_1(\Theta_2), \Theta_2) = \frac{1-\gamma}{2}$ – противор. ◻

3) $t_1(\Theta) < T(X) \Leftrightarrow \Theta > \varphi_1(T(X)) \Rightarrow \mathbb{P}_\Theta(\Theta > \varphi_1(T(X))) = \frac{1-\gamma}{2}$

$t_2(\Theta) > T(X) \Leftrightarrow \Theta < \varphi_2(T(X)) \Rightarrow \mathbb{P}_\Theta(\Theta < \varphi_2(T(X))) = \frac{1-\gamma}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}_\Theta(\underbrace{\varphi_2(T(X))}_{T_1(X)} \leq \Theta \leq \underbrace{\varphi_1(T(X))}_{T_2(X)}) = \gamma$, где $\varphi_1 = t_1^{-1}$, $\varphi_2 = t_2^{-1}$

① Виды сходимости последов. случ величин

Ниже все ξ_i на одном пр-ве

Опр Посл. случ величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ почти наверное сход к случ. вел ξ $(\xi_n \xrightarrow{п.н} \xi)$, если $\mathbb{P}(\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\}) = 1$

Опр: Посл. случ величин $\{\xi_n\}_1^{+\infty}$ сход по вероятности к сл. вел ξ $(\xi_n \xrightarrow{P} \xi)$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Опр: Посл. сл. величин $\{\xi_n\}_1^{+\infty}$ сход в среднем к случ вел. ξ $(\xi_n \xrightarrow{(r)} \xi$ или $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi)$, если $E|\xi_n - \xi|^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $r \geq 1$

Ниже ξ_i м б из разн пространств

Опр: Посл сл. вел $\{\xi_n\}_1^{\infty}$ сход по распредел. к случ велич ξ $(\xi_n \xrightarrow{d} \xi)$, если $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x)$ $\forall x$, в котор F_ξ непр

Опр Посл сл. вел $\{\xi_n\}_1^{\infty}$ слабо сход к сл. велич ξ $(\xi_n \xRightarrow{W} \xi)$, если $Ef(\xi_n) \to Ef(\xi)$ $\forall$ непр. огр. $f(x)$

Утв: все виды сход связаны след. обр:

$$\begin{matrix} п.н \Rightarrow \\ (r) \Rightarrow \end{matrix} P \Rightarrow d \Longleftrightarrow W$$

Д $(r) \Rightarrow P$: нер-во Маркова: $\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|\xi_n - \xi|^r \geq \varepsilon^r) \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$(r) \not\Leftarrow P$: Д посл. сл. вел:

$\xi_n = \begin{cases} 0; & 1/n < \omega \leq 1 \\ \sqrt[r]{n}; & 0 \leq \omega \leq 1/n \end{cases} \Rightarrow p_1 = 1 - \frac{1}{n}$, $p_2 = \frac{1}{n}$

$\mathbb{P}(|\xi_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но $E|\xi_n|^r = 1$

п.н $\Rightarrow P$. От противного: Вып опр п.н, но нет сход по вероятн.

$\exists \varepsilon'$ - из опр. предела, ε - из опр. сходим. Тогда (опр. сх по вероятн):

$\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ вып $\mathbb{P}(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}) < \varepsilon'$

По предпол. сход по вер. нет, т.е

$\exists \varepsilon_0 > 0, \varepsilon_0' > 0$: $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \geq N$ вып $\mathbb{P}(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon_0\}) \geq \varepsilon_0' > 0$

Опр. сход п.н: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ вып $\mathbb{P}(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$

Подст. ε_0 и помен. знак: $\mathbb{P}(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon_0\}) = 0$ - противор

2-му нер-ву $\Rightarrow$ п.н $\Rightarrow P$

п.н $\not\Leftarrow P$: Д вероят пр-во $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ (λ-мера Лебега). $\exists \xi = 0$

$\xi_{2^k} = I([0, \frac{1}{2^k}])$, $\xi_{2^k+p} = I([\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}])$, $1 \leq p < 2^k$. Тогда $\xi_n \xrightarrow{P} 0$

т.к. $\mathbb{P}(\xi_{2^k+p}>0)\le\lambda([\frac{p}{2^k},\frac{p+1}{2^k}])\le\frac{1}{2^k}\to0$, но $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\not\to} 0$ т.к. $\forall\omega\ \exists$ беск. много $n: \xi_n(\omega)=1$

(2) $\not\Leftarrow$ п.н. Возьмём то же вер. пр-во $([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]},\lambda)$. Определим для $k\ge1$ $\xi_k=2^k I([0,\frac{1}{2^k}])$. Тогда $\forall k\ E\xi_k=1$, но $\xi=I(\omega=0)$

$p\Rightarrow w$ Пусть f - огр. и непр., $|f|\le C$. Зафикс. $\varepsilon>0$. $\exists N,\exists\delta$:

1. $\mathbb{P}(|\xi|>N)\le\frac{\varepsilon}{6C}$ (возмож., т.к. $\mathbb{P}(\xi>x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$)
2. $\mathbb{P}(|\xi_n-\xi|>\delta)\le\frac{\varepsilon}{6C}$ $\forall n\ge N$ (из сход. по вероят)
3. $\forall x,y: |x|<N, |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le\frac{\varepsilon}{3}$, т.к. f по теор. Кант. р.н. на $[-N,N]$

Возьмём след. события:

$A_1=\{|\xi_n-\xi|\le\delta\}\cap\{|\xi|<N\}$ $\quad A_3=\{|\xi_n-\xi|>\delta\}$.

$A_2=\{|\xi_n-\xi|\le\delta\}\cap\{|\xi|\ge N\}$ $\quad$ Эти соб. образ. разбиен. $\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$

Оценим $|Ef(\xi_n)-Ef(\xi)|$:

$$|Ef(\xi_n)-Ef(\xi)|=|E(f(\xi_n)-f(\xi))|\le E|f(\xi_n)-f(\xi)|=E[|f(\xi_n)-f(\xi)|\cdot(I(A_1)+$$
$$+I(A_2)+I(A_3))]\le\frac{\varepsilon}{3}\mathbb{P}(A_1)+2C(\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3))\le\frac{\varepsilon}{3}+2C\left(\frac{\varepsilon}{6C}+\frac{\varepsilon}{6C}\right)=\varepsilon\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|Ef(\xi_n)-Ef(\xi)|\to0\Rightarrow\xi_n\xrightarrow{w}\xi$$

$p\not\Leftarrow d$ Пусть $\xi_n=\begin{cases}1, & p_1=\frac12\\ 0, & p_0=\frac12\end{cases}$, $\xi=\begin{cases}0, & p_1=\frac12\\ 1, & p_0=\frac12\end{cases}$ Тогда $|\xi_n-\xi|=\begin{cases}1, & p_1=\frac12\\ 0, & p_0=\frac12\end{cases}$ и не вып. опр. сх. по вероят, напр. при $\varepsilon_0=\frac13$: $\mathbb{P}(|\xi_n-\xi|>\frac13)=1\underset{n\to\infty}{\not\to}0$

$p\not\Leftarrow w$ Пусть $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_1\})=\mathbb{P}(\{\omega_2\})=\frac12$. Определим $\forall n\ \xi_n(\omega_1)=1$, $\xi_n(\omega_2)=-1$. Пусть $\xi=-\xi_n$. Тогда

$Ef(\xi_n)=\frac{f(1)+f(-1)}{2}=Ef(\xi)$ но $\forall n\ |\xi_n-\xi|=2\Rightarrow\xi_n\overset{P}{\not\to}\xi$

$\square$

② Полн. и дост. статистики. Теор. Колмогорова и Рао–Блекуэлла–Колмогорова об оптим. оценках

Опр Ф-ция правдоподобия выборки X: $L(X,\theta)=f_\theta(X_1)\ldots f_\theta(X_n)=\prod_{i=1}^n f_\theta(X_i)$

дискр: $L(X,\theta)=\prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)=P_\theta(X_1=x_1)\ldots P_\theta(X_n=x_n)=P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)$

Опр. Статистика $T(X)$ назыв. полной, если $\forall$ борелевской ф-ции $\varphi(T)$, для которой $E_\theta\varphi(T)=0$ $\forall\theta\in\Theta$ справед. $\varphi(T)\overset{\text{п.н.}}{=}0$

Опр. Статистика $T(X)$ назыв. достаточной, если $\forall t\in\mathbb{R}^m,\forall B\in\mathcal{B}^n$ условн. распр. $P_\theta((X_1,\ldots,X_n)\in B|T=t)$ не завис. от параметра θ. Или: $T(X)$ дост., если $E_\theta(X|T(X))$ не завис от θ

Критерий факторизации:

$T(x)$ – дост статистика $\Leftrightarrow$ её ф-ция правдоподобия представима в виде: $L(x_1,\dots,x_n,\theta) \overset{п.н}{=} g(T(x),\theta)\cdot h(x)$

▷ д-м только дискр. случай

$(\Rightarrow)$ $\exists\, T(x)$ – дост, x – произв. реализация $\exists\, T(x)=t$

$$L(x,\theta)=P_\theta(X=x)=P_\theta(X=x,T(x)=t)=\underbrace{P_\theta(T(x)=t)}_{g(T(x),\theta)}\cdot\underbrace{P_\theta(X=x\mid T(x)=t)}_{h(x)}$$

$(\Leftarrow)$ $\exists\, L(x,\theta)=g(T(x),\theta)\cdot h(x)$ $\Rightarrow$ если $x: T(x)=t$, то:

$$P_\theta(X=x\mid T(X)=t)=\frac{P_\theta(X=x,T(X)=t)}{P_\theta(T(X)=t)}=\frac{P_\theta(X=x)}{\Sigma P(X=x')}=\frac{g(T(x),\theta)h(x)}{g(T(x),\theta)\Sigma h(x')}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ не завис от θ $\Rightarrow$ дост

Теор Рао–Блекуэлла–Колмогорова Если $\exists$ оптим оценка для $\tau(\theta)$, то она явл ф-цией от достаточн. статистики

▷ Докажем более сильное утв.:

$\forall$ несмещ оценки можно построить новую оценку, являющуюся ф-цией от достат. стат, при этом дисперсия постр. оценки будет не больше исходной

1) Построим искомую статистику. $\exists\, T(X)$ – достат. статистика

$T_1(X)$ – несмещ оценка $\tau(\theta)$ $\Rightarrow$ $E_\theta T_1(X)=\tau(\theta)$

$\exists\, H(T)=E_\theta(T_1\mid T)\Rightarrow E_\theta H(T)=ET_1=\tau(\theta)\Rightarrow H$ – несмещ $\tau(\theta)$

2) Покажем, что ее $D_\theta \le D_\theta$ (исход):

$$D_\theta T_1=E_\theta(T_1-E_\theta T_1)^2=E_\theta(T_1-\tau(\theta)+H(T)-H(T))^2=\underbrace{E_\theta(T_1-H(T))^2}_{\geq 0}+$$

$$+2E_\theta\underbrace{((T_1-H(T))(H(T)-\tau(\theta)))}_{(*)}+D_\theta H(T)$$

$(*)$: $E_\theta[(T_1-H(T))(H(T)-\tau(\theta))]=E_\theta(E_\theta[(T_1-H(T))(H(T)-\tau(\theta))\mid T])=$

$=E_\theta((H(T)-\tau(\theta))(E_\theta(T_1\mid T)-E_\theta(H(T)\mid T))=0$ $\Rightarrow D_\theta T_1\geq D_\theta H(T)$ $\Rightarrow$ если $\exists$ опт. оценка T_1, то $H(T)$ – тоже опт оценка, но она единственно

$\Rightarrow H(T)=E_\theta(T_1\mid T)=f(T)$ ф-ция от дост статистики $\square$

Теор. Колмогорова: $\exists\, T(X)$ – полная достаточн. статистика. $\exists\, \varphi(x)$ – борелевская ф-ция и $E_\theta\varphi(T(x))=\tau(\theta)\Rightarrow\varphi(T(x))$ – опт оц для $\tau(\theta)$

▷ Из теор Рао-Блекуэлла Колмогорова.

Если $\exists$ несмещ. оценка $\tau(\theta)$, то $\exists$ и несмещ. оценка $\tau(\theta)$, явл ф-цией от дост. стат

$\exists T_1 = \varphi_1(T)$ - несмещ. для $\tau(\theta)$, T - ПДС; $\exists\, T_2 = \varphi_2(T)$ - также несмещ. оц $\tau(\theta)$

$\Rightarrow ET_1 = \tau(\theta) = E(T_2) \Rightarrow E(\varphi_1(T) - \varphi_2(T)) = E(\varphi_1(T)) - E(\varphi_2(T)) = 0$

Но T - полн $\Rightarrow \varphi_1(T) \overset{п.н}{=} \varphi_2(T)$

$\Rightarrow T_1 = T_2$ - ед. несмещ. оц. $\Rightarrow$ оптим $\square$

① Нер-во Колмогорова

$\exists\ \xi_1, \xi_2, \dots$ — послед независ случ велич, у каждой $\exists D\xi_k \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ вып $P(\sup_{1\le k\le n} |S_k - ES_k| \geq \varepsilon) \leq \frac{DS_n}{\varepsilon^2}$, где $S_k = \sum_1^k \xi_i$

▷ $\exists\ E\xi_k = 0$, $\exists\ B = (\sup_{1\le k\le n} |S_k| \geq \varepsilon)$, $B_k = (|S_1| < \varepsilon, \dots, |S_{n-1}| < \varepsilon, |S_n| \geq \varepsilon) \Rightarrow$
$\Rightarrow B_1, \dots, B_n$ — попарно несовмест, $B = \bigcup_1^n B_k$

$S_n^2 \geq S_n^2 1\!\!1_B = \sum_{k=1}^n S_n^2 1\!\!1_{B_k} = \sum_1^n ((S_n - S_k) + S_k)^2 1\!\!1_{B_k} = \sum_1^n S_k^2 1\!\!1_{B_k} + 2\sum_1^n (S_n - S_k) 1\!\!1_{B_k} \cdot S_k +$
$+ \sum_1^n (S_n - S_k)^2 1\!\!1_{B_k}$

$DS_n = ES_n^2 \geq \sum_1^n ES_k^2 1\!\!1_{B_k} + 2\sum_{k=1}^n E(S_n - S_k) S_k 1\!\!1_{B_k} + \sum_{k=1}^n (S_n - S_k)^2 1\!\!1_{B_k}$
(1) (2) (3)

$S_k 1\!\!1_{B_k} = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_k)$, $S_n - S_k = \xi_{k+1} + \dots + \xi_n = \psi(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$

$\varphi(\xi_i)$ и $\psi(\xi_i)$ независ $\Rightarrow$ (2) $= 0$, (3) $\geq 0 \Rightarrow DS_n \geq \sum_1^n ES_k^2 1\!\!1_{B_k}$

$ES_k^2 1\!\!1_{B_k} = \int_{B_k} S_k^2 P(d\omega)$, $S_k^2 \geq \varepsilon^2 \Rightarrow ES_k^2 1\!\!1_{B_k} \geq \varepsilon^2 P(B_k)$

$\Rightarrow DS_n \geq \sum_1^n \varepsilon^2 P(B_k) = \varepsilon^2 P(\bigcup_1^n B_k) = \varepsilon^2 P(B)$ ▷

② Метод моментов. Св-ва оценок, получ методом моментов

$\exists\ (X_1, \dots, X_n)$ — выборка объема n из парам. семейства распр P_θ. Возьмём $g(y): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: чтоб $\exists$ момент $E_\theta g(X_1) = h(\theta)$ и $h(\theta)$ — обратима на Θ. Решим относ θ, а затем вместо истинного момента возьмем выборочный:

$\theta = h^{-1}(E_\theta g(X_1))$, $\theta^* = h^{-1}(\overline{g(X)}) = h^{-1}(\frac{1}{n}\sum_1^n g(X_i))$

Полученная оценка θ^* — оценка метода моментов для парам θ

Обычно берут $g(y) = y^k$. Тогда, при усл обратим h на Ω:

$E_\theta X_1^k = h(\theta)$, $\theta = h^{-1}(E_\theta X_1^k)$, $\theta^* = h^{-1}(\overline{X^k}) = h^{-1}(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^k)$

Утв $\exists\ \theta^* = h^{-1}(\overline{g(X)})$ — оценка парам θ, получ методом моментов, причём h^{-1} непр. Тогда оценка θ^* состоятельна

▷ По ЗБЧ Хинчина: $\overline{g(X)} = \frac{1}{n}\sum g(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{P} E_\theta g(X_1) = h(\theta)$. Т.к h^{-1} непрер, то
$\theta^* = h^{-1}(\overline{g(X)}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} h^{-1}(E_\theta g(X_1)) = h^{-1}(h(\theta)) = \theta$ □

Опр Ассимптотически нормальная оценка парам θ с коэф $\sigma^2(\theta)$ — оценка θ^*: при $n \to \infty$ имеет место слаб. сходим к станд. норм распр:
$\frac{\sqrt{n}(\theta^* - \theta)}{\sigma(\theta)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$

Лемма: $\exists\ g(y)$: $0 \neq D_\theta g(X_1) < \infty \Rightarrow \overline{g(X)}$ — ассимпт. норм. оц. для $Eg(X_1)$ с коэф. $\sigma^2(\theta) = D_\theta g(X_1)$: $\sqrt{n}\frac{\overline{g(X)} - E_\theta g(X_1)}{\sqrt{D_\theta g(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$

▷ Следует из ЦПТ □

Утв: $\exists$ ф-ция $g(y)$: $0 = D_\theta g(X_1) < \infty$, $H(y)$ диф в точке $a = Eg(X_1)$ и её производ в этой т. $H'(a) = H'(y)|_{y=a} \neq 0$. Тогда оценка $\theta^* = H(\overline{g(X)})$ явл. ассимпт. норм оценкой для парам $\theta = H(E_\theta g(X_1)) = H(a)$ с коэф ассимпт. нормальности $\sigma^2(\theta) = (H'(a))^2 \cdot D_\theta g(X)$

$\triangleright$ ЗБЧ: $\overline{g(X)} \longrightarrow a = E_\theta g(X_1)$ по вероятности с ростом n. Ф-ция

$G(y) = \begin{cases} \frac{H(y) - H(a)}{y - a} & , y \neq a \\ H'(a) & , y = a \end{cases}$ по усл. непрер. в т. a: т.к. сход по вероят сохр. под действ непр. ф-ции:

$G(\overline{g(X)}) \xrightarrow[n\to\infty]{p} G(a) = H'(a)$.

По лемме выше: велич $\sqrt{n}(\overline{g(X)} - a)$ слаб сход к норм распр $N(0, D_\theta g(X_1))$: $\exists \xi$-сл. вел из этого распр. Тогда

$\sqrt{n}(H(\overline{g(X)}) - H(a)) = \sqrt{n}(\overline{g(X)} - a) \cdot G(\overline{g(X)}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi \cdot H'(a)$.

Мы. исп. св-во: если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} c = const$, то $\xi_n \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c\xi$. Но распр. сл. вел $\xi \cdot H'(a)$ есть $N(0, (H'(a))^2 \cdot D_\theta g(X_1)) \Rightarrow \sigma^2(\theta) = (H'(a))^2 \cdot D_\theta g(X_1)$

① Лемма Бореля–Кантелли

$\exists A_1, \ldots, A_N$ – послед. событий

1) Если $\sum_1^\infty \mathbb{P}(A_n) < \infty$, то $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = 0$

2) Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ – нез и $\sum_1^\infty \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, то $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = 1$

$\triangleright$ 1) $\exists \sum_1^\infty \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \sum_{n=k}^\infty \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_n A_n = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k) \le \mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^\infty A_k) \le$
$\le \sum_{k=n}^\infty \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2) Я дополн. верх предела: $\overline{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \overline{\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k} = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty \overline{A_k}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n}) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty \overline{A_k}) \le \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^\infty \overline{A_k}) \le \{\forall M \ge n\} \le \mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^M \overline{A_k}) \overset{\text{нез}}{=}$
$= \prod_{k=n}^M \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^M (1 - \mathbb{P}(A_k))$

$\mathbb{P}(A_k) \in [0,1]$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow 1 - x \le e^{-x}$

$\Rightarrow \prod_{k=n}^M (1 - \mathbb{P}(A_k)) \le \prod_{k=n}^M e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^M \mathbb{P}(A_k)} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\text{доп соб}) = 1 - 0 = 1$ $\square$

② Метод макс правдопод. Св-ва оценок

Опр: *Оценка макс. правдопод.* $\theta^*(X)$ параметра θ – точка параметрического мн-ва Θ, в которой ф-ция правдопод. $L(X, \theta)$ при задан реализац. выборки x достиг максим.:

$$L(x, \theta^*) = \max_{\theta \in \Theta} L(x, \theta)$$

Если $\forall X$ макс ф-ции правдоп. достиг во внутр. точке Θ, и $L(X, \theta)$ диф по θ, то оценка макс правдопод об $\theta^* = \theta^*(X)$ удовл ур-ю: $\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta} = 0$

Утв: Если $T(X)$ – дост. стат, а оценка правдопод θ^*, то прав. часть обнулится $\Rightarrow \tilde{T}(X) = \theta^*$.

$\triangleright$ Из крит факториз: если $T = T(X)$ – дост. стат, то $L(X, \theta) =$
$= g(T(X), \theta) h(X) \Rightarrow$ максимум $L(X, \theta)$ сводится к максимуму $g(T(X), \theta)$ по $\theta \Rightarrow \theta^*$ – ф-ция от $T(X)$ $\square$

Инвариантн. метода макс. правдоподобия: $\exists f: \Theta \to Y$ – биекция. Тогда, если θ^* – оценка макс. правд для θ, то $f(\theta^*)$ – оценка макс правд для $f(\theta)$

$\triangleright$ $L(x, \theta^*) = \sup\limits_{\theta \in \Theta} L(x, \theta) = \sup\limits_{y \in Y} L(x, f^{-1}(y)) = L(x, f^{-1}(y^*)) \Rightarrow \theta^* = f^{-1}(y^*)$ и
$y^* = f(\theta^*)$ $\square$

Опр: Ассимптотич. эффективн. оценка парам $\tau(\theta)$ – оценка τ^*:

$$D_\theta \tau^* \cdot \frac{i_n(\theta)}{(\tau'(\theta))^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \text{ где } i_n(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = E_\theta(U^2(X,\theta))$$

Утв: Пусть вып. след усл.

1) Ф-ция правд $L(X,\theta)$ удовл усл регулярн для перв. двух произв.
2) $\exists!$ оценка макс. правдоп. θ^* $\forall\theta$, котор достиг. во внутр. т.

Тогда оценка θ^*:

1) ассимптотич. несмещена
2) состоятельна
3) ассимптотич. эффективна
4) ассимптотич. нормальна

① Усил. закон больш. чисел в форме Колмогорова

$\exists\ \xi_1, \xi_2, \ldots$ – посл независ. сл. вел, $E\xi_k = a_k$, $D\xi_k = b_k^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^2} < \infty$

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ с вероятн. 1

$\triangleright$ $\eta_n = \sup_{1\le m\le 2^n} |S_m - ES_m| \Rightarrow \frac{1}{k}|S_k - ES_k| \le 2^{-n}\eta_{n+1}$, $2^n \le k \le 2^{n+1}$

$\Rightarrow$ достаточно показ, что $\frac{\eta_{n+1}}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ с вер 1

$\Rightarrow$ покажем: $\forall \varepsilon > 0$ выполн. лишь конечн. число событий $A_n = \left(\frac{\eta_{n+1}}{2^n} > \varepsilon\right)$

в силу леммы Бореля-Кантелли достаточно $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

$\Delta\ \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\eta_{n+1}}{2^n} > \varepsilon\right) \le \{\text{нер-во Колмогорова}\} \le \frac{DS_{2^{n+1}}}{\varepsilon^2 2^{2n}} \le \frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \sum_{n\ge[\log_2 k]-1} 2^{-2n} \le \frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \frac{2^{-2[\log_2 k]-1}}{1-\frac{1}{4}} \le$

$\le \frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \cdot \frac{2^{-2\log_2 k - 1}}{3/4} \le C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{k^2} < \infty$ $\square$

② Стат. структура. Выборка. Статистика. Выбор. моменты и св-ва

Опр: Стат. структура – совокуп. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}_\theta)$, где $\mathbb{R}^n$ – выборочное пр-во, $\mathcal{B}^n$ – борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{P}_\theta$ – семейство распределений, опред. на $\mathcal{B}^n$, параметриз одно- или много-мерном числ. парам $\mathcal{P}_\theta = (\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m)$

Опр: Выборка $X = (X_1, \ldots, X_n)$ объема n – набор из n независ и одинаково распред СВ (случ. величин), имеющих такое же распред, как и наблюд. СВ

Опр: Статистика (или оценка) – измеримая ф-ция от выборки, не зависящая от $\forall$ др. парам: $T: \mathbb{R}^n \to \Theta$

Опр: Выборочн. мат ожид: $\tilde{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$

Выб мат ожид ф-ции $g(\xi)$: $\tilde{E}g(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) = \overline{g(X)}$

Опр: Выборочн. дисперс: $\tilde{D}\xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(X_i - \tilde{E}\xi)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = S^2$

Опр: Несмещ. выб. дисп.: $S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1}S^2$

Опр: Выборочн. момент k-го порядка: $\tilde{E}[\xi^k] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = \overline{X^k}$

Опр: Статистика $T(X)$ наз ассимпт норм, если $\exists\ a_n(\theta), \sigma_n(\theta)$: $\frac{T_n(X) - a_n(\theta)}{\sigma_n(\theta)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$

Или: ассимпт. норм, если с ростом объема выборки её ф-ция распр стремится к ф-ции норм распределения

Ут Выборочное среднее $\overline{X}$ явл несмещ, состоят и ассимпт. норм оценкой для теоритич среднего (мат ожид), т.е:

1) Если $E_\theta|X_1| < \infty$, то $E_\theta \overline{X} = E_\theta X_1 = a$

2) Если $E_\theta|X_1| < \infty$, то $\overline{X} \xrightarrow[n\to\infty]{P} E_\theta X_1 = a$

3) Если $D_\theta X_1 < \infty$, $D_\theta X_1 \ne 0$, то $\frac{\overline{X} - E_\theta \overline{X}}{\sqrt{D_\theta \overline{X}}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - E_\theta X_1}{\sqrt{D_\theta X_1}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$

▷ 1) Из линейности мат ож: $E_\Theta \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_1^n E_\Theta X_i = \frac{1}{n} n E_\Theta X_1 = E_\Theta X_1 = a$

2) ЗБЧ в форм Хинчина: $\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} E_\Theta X_1 = a$

3) $X_1, \ldots, X_n$ незав и одинак распр $\Rightarrow$ раскр. дисперс и домнож. числ и знам на n

Применим ЦПТ:

$$\frac{\overline{X} - E_\Theta \overline{X}}{\sqrt{D_\Theta \overline{X}}} = \frac{\overline{X} - E_\Theta X_1}{\sqrt{D_\Theta[\frac{1}{n}\sum X_i]}} = \frac{\overline{X} - E_\Theta X_1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} D_\Theta[\sum X_i]}} = \frac{\overline{X} - E_\Theta X_1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} n D_\Theta X_1}} = \frac{\frac{1}{n}\sum X_i - E_\Theta X_1}{\sqrt{\frac{1}{n} D_\Theta X_1}} = \sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}\sum X_i - E_\Theta X_1}{\sqrt{D_\Theta X_1}} =$$

$$= \sqrt{n}\frac{\sum X_i - n E_\Theta X_1}{\sqrt{n}\sqrt{D_\Theta X_1}} = \frac{\sum X_i - n E_\Theta X_1}{\sqrt{n D_\Theta X_1}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

□

Утв: $\exists D_\Theta X_1 < \infty$.

1) Выбор. дисп. S^2 и S_0^2 явл состоят оценками для истин дисперс:

$S^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} D_\Theta X_1 = \sigma^2$, $S_0^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} D_\Theta X_1 = \sigma^2 \quad \forall \Theta \in \Theta$

2) S^2 — смещ. оц. дисперс, а S_0^2 — несмещ:

$E_\Theta S^2 = \frac{n-1}{n} D_\Theta X_1 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$, $E_\Theta S_0^2 = D_\Theta X_1 = \sigma^2 \quad \forall \Theta \in \Theta$

3) Если $0 \neq D_\Theta[(X_1 - E_\Theta X_1)^2] < \infty$, то S^2 и S_0^2 явл ассимпт. норм оц. истин дисп:

$\sqrt{n}(S^2 - D_\Theta X_1) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, D_\Theta(X - E_\Theta X_1)^2) \quad \forall \Theta \in \Theta$

▷ 1) $S^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + (\overline{X})^2) = \frac{1}{n}(n\overline{X^2} - 2\overline{X}\sum X_i + n(\overline{X})^2) = \overline{X^2} - 2(\overline{X})^2 + (\overline{X})^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$

1 и 2-й выб. моменты состоят + св-во сход по вероятн:

$S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} E_\Theta X_1^2 - (E_\Theta X_1)^2 = \sigma^2 \qquad \frac{n}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow S_0^2 = \frac{n}{n-1} S^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sigma^2$

2) Несмещ 1 и 2-го моментов: $E_\Theta S^2 = E_\Theta(\overline{X^2} - (\overline{X})^2) = E_\Theta \overline{X^2} - E_\Theta(\overline{X})^2 = E_\Theta X_1^2 - E_\Theta(\overline{X})^2 =$

$= E_\Theta X_1^2 - ((E_\Theta \overline{X})^2 + D_\Theta \overline{X}) = E_\Theta X_1^2 - (E_\Theta X_1)^2 - D_\Theta(\frac{1}{n}\sum X_i) = D_\Theta X_1 - D_\Theta(\frac{1}{n}\sum X_i) =$

$= \sigma^2 - \frac{1}{n^2} n D_\Theta X_1 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \quad \Rightarrow E_\Theta S_0^2 = \frac{n}{n-1} E_\Theta S^2 = \sigma^2$

3) Введем сл. величины $Y_i = X_i - a$; $E_\Theta Y_i = 0$, $D_\Theta Y_1 = D_\Theta X_1 = \sigma^2$

$S^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - a - (\overline{X} - a))^2 = \overline{Y^2} - (\overline{Y})^2$

$\sqrt{n}(S^2 - \sigma^2) = \sqrt{n}(\overline{Y^2} - (\overline{Y})^2 - \sigma^2) = \sqrt{n}(\overline{Y^2} - E_\Theta Y_1^2) - \sqrt{n}(\overline{Y})^2 = \frac{\sum Y_i^2 - n E_\Theta Y_1^2}{\sqrt{n}} -$

$- \overline{Y}\cdot\sqrt{n}\cdot\overline{Y} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N^2(0, D_\Theta(X_1 - E_\Theta X_1))$, поскольку $\frac{\sum Y_i^2 - n E_\Theta Y_1^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, D_\Theta Y_1^2)$

по ЦПТ, а $\overline{Y}\cdot\sqrt{n}\,\overline{Y} \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0$ как произвед послед $\overline{Y} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ и $\sqrt{n}\,\overline{Y} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, D_\Theta X_1)$

□

① Нер-ва Маркова и Чебышева

Нер-во Маркова: Если $E|\xi|<\infty$, то $\forall x>0$ вып $\mathbb{P}(|\xi|\geq x)\leq \frac{E|\xi|}{x}$

▷ $I(A)\sim B_p$, $p=\mathbb{P}(I(A)=1)=\mathbb{P}(A)=EI(A)$.

Индикаторы прям. и противоположн. событий связаны с р-вом

$I(A)+I(\bar{A})=1 \Rightarrow$

$|\xi|=|\xi|\cdot I(|\xi|<x)+|\xi|\cdot I(|\xi|\geq x)\geq|\xi|\cdot I(|\xi|\geq x)\geq x\cdot I(|\xi|\geq x)$

Тогда $E|\xi|\geq E(x\cdot I(|\xi|\geq x))=x\cdot\mathbb{P}(|\xi|\geq x)$. Ост раздел. обе части на $x>0$

□

Нер-во Чебышева: Если $\exists D\xi$, то $\forall\varepsilon>0$ вып $\mathbb{P}(|\xi-E\xi|\geq\varepsilon)\leq\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$

▷ Для $\varepsilon>0$ нер-во $|\xi-E\xi|\geq\varepsilon \Leftrightarrow (\xi-E\xi)^2\geq\varepsilon^2 \Rightarrow \mathbb{P}(|\xi-E\xi|\geq\varepsilon)=$

$=\mathbb{P}((\xi-E\xi)^2\geq\varepsilon^2)\leq\frac{E(\xi-E\xi)}{\varepsilon^2}=\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ □

② Статистич. структура. Выборка. Поряд. стат. Вариац. ряд. Выбороч. ф-ция распр. Св-ва

Опр: Стат. структура — совокуп. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}_\Theta)$, где $\mathbb{R}^n$ — выборочное пр-во, $\mathcal{B}^n$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}_\Theta$ — семейство распределений, опред. на $\mathcal{B}^n$, параметриз. одно- или много-мерным числ. парам $\mathcal{P}_\Theta=(\mathbb{P}_\theta:\ \theta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}^m)$

Опр: Выборка $X=(X_1,\dots,X_n)$ объема n — набор из n независ и одинаково распред СВ (случ. величин), имеющих такое же распред, как и наблюд. СВ

Опр: Статистика (или оценка) — измеримая ф-ция от выборки, не зависящая от $\forall$ др. парам: $T:\ \mathbb{R}^n\to\Theta$

Опр: Вариац. ряд — набор СВ $X_{(1)},\dots,X_{(n)}$, который получ при упорядочивании выборки $X=(X_1,\dots,X_n)$ по возраст на кажд. эл. исходе.

Опр: Выборочн. мат ожид — $\tilde{E}_\xi=\sum_1^n\frac{1}{n}X_i=\frac{1}{n}\sum X_i=\overline{X}$; $\tilde{E}_{g(\xi)}=\frac{1}{n}\sum_1^n g(X_i)=\overline{g(X)}$

Опр: Выборочн. дисперс — $\tilde{D}_\xi=\sum_1^n\frac{1}{n}(X_i-\tilde{E}_\xi)^2=\frac{1}{n}\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2=S^2$

Опр: Несмещ. выбороч дисп — $S_0^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2=\frac{n}{n-1}S^2$

Опр: Выборочная (эмпирич) ф-ция распр, постр. по выборке $X_1,\dots,X_n$ объема n — случ. ф-ция F_n^*: $F_n^*(y)=\frac{1}{n}\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y)$ $\forall y\in\mathbb{R}$

Строится: $F_n^*(y)=\begin{cases}0, & y\leq X_{(1)}\\ k/n, & X_{(k)}<y<X_{(k+1)}\\ 1, & y>X_{(n)}\end{cases}$

Св-ва выбороч. ф-ции:

1. Пусть $(X_1,\dots,X_n)$ — выборка из семейства распр $\mathcal{P}_\Theta$ с ф-цией распр F_Θ и $\exists F_n^*$ — эмпир. ф-ция распр, постр по этой выборке. Тогда $F_n^*(y)\xrightarrow[n\to\infty]{P}F_\theta(y)$ $\forall y\in\mathbb{R}$ и $\forall\theta\in\Theta$

▷ $F^*_n(y) = \frac{1}{n}\sum_1^n \mathbb{1}(X_i < y)$. при этом СВ $\mathbb{1}(X_1<y), \mathbb{1}(X_2<y)\dots$ нез и одинак распред. их мат ожид конечно:

$E_\Theta \mathbb{1}(X_1<y) = 1\cdot \mathbb{P}_\Theta(X_1<y) + 0\,\mathbb{P}_\Theta(X_1 \geq y) = P_\Theta(X_1<y) = F_\Theta(y) < \infty$

$\Rightarrow$ ЗБЧ (закон больш. чисел) в форме Хинчина

$$F^*_n(y) = \frac{\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} E_\Theta \mathbb{1}(X_1<y) = F_\Theta(y) \quad \forall \Theta \in \Theta \quad \square$$

2. $\forall y \in \mathbb{R}$ и $\forall \Theta \in \Theta$ вып:

1) $E_\Theta F^*_n(y) = F_\Theta(y)$ (т.е $F^*_n(y)$ - несмещ оценка для $F_\Theta(y)$)

▷ $E_\Theta F^*_n(y) = E_\Theta \frac{\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y)}{n} = \frac{\sum_1^n E_\Theta \mathbb{1}(X_i<y)}{n} = \frac{n\, E_\Theta \mathbb{1}(X_1<y)}{n} = F_\Theta(y) \quad \square$

2) $D_\Theta F^*_n(y) = \frac{F_\Theta(y)(1-F_\Theta(y))}{n} \leq \frac{1}{4n}$

▷ $\mathbb{1}(X_i<y)$ - незав и один распр $\Rightarrow D_\Theta F^*_n(y) = D_\Theta \frac{\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y)}{n} = \frac{\sum_1^n D_\Theta \mathbb{1}(X_i<y)}{n^2} =$

$= \frac{n D_\Theta \mathbb{1}(X_1<y)}{n^2} = \frac{F_\Theta(y)(1-F_\Theta(y))}{n}$

$F_\Theta(y) \in [0,1] \Rightarrow F_\Theta(y)(1-F_\Theta(y)) \leq \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \quad \square$

3) $\exists\ \sigma^2(y) = (1-F_\Theta(y))F_\Theta(y) \Rightarrow \sqrt{n}(F^*_n(y) - F_\Theta(y)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \sigma^2(y))$

(т.е $F^*_n(y)$ - ассимптотич норм оценка для $F_\Theta(y)$)

▷ ЦПТ (центр. предельн. теор): $\sqrt{n}(F^*_n(y) - F_\Theta(y)) = \sqrt{n}\left(\frac{\sum \mathbb{1}(X_i<y)}{n} - F_\Theta(y)\right) =$

$= \frac{\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y) - nF_\Theta(y)}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_1^n \mathbb{1}(X_i<y) - nE_\Theta \mathbb{1}(X_1<y)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, D_\Theta \mathbb{1}(X_1<y)) = N(0, (1-F_\Theta(y))F_\Theta)$ $\square$

4) $nF^*_n(y) \sim \underline{Bi}(n, F_\Theta(y))$ — биномин. распр

▷ бином. распр устойч по суммир: $\mathbb{1}(X_i<y)$ нез и $\sim Bi(1, F_\Theta(y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow nF^*_n(y) = \mathbb{1}(X_1<y) + \dots + \mathbb{1}(X_n<y)$ имеет $Bi(n, F_\Theta(y)) \quad \square$

5) $F^*_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{n+1} F_\Theta(y)$

▷ $\forall y \in \mathbb{R}$. $\xi_i = \mathbb{1}(X_i<y)$ - нез, одинак распр, $\exists E_\Theta \xi_i = F_\Theta(y) \Rightarrow$ УЗБЧ (усиленный зак. больш. чисел) в ф Колмогорова $P_\Theta(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum \xi_i = F_\Theta(y)) = 1$

$\forall \Theta \in \Theta$

$\square$

① ЗБЧ в форме Чебышева

Для $\forall$ посл $\xi_1, \xi_2, \dots$ попарно независ и одинак распр. случ велич с конеч вторым моментом $E\xi_1^2 < \infty$ имеет место сходимость: $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_1$

▷ $\exists S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Из линейности мат. ожид:
$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E\xi_1 + \dots + E\xi_n}{n} = \frac{nE\xi_1}{n} = E\xi_1$.
$\exists \varepsilon > 0$. Нер-во Чебышева: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} =$
$= \frac{D\xi_1 + \dots + D\xi_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{nD\xi_1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ т.к $D\xi_1 < \infty$

Дисп. суммы $\to$ сумма дисперс в силу попар. независ. слаг из-за котор все ковариации $cov(\xi_i, \xi_j)$ по св-ву ковариац. обр в 0 □

② Нер-во Рао-Крамера. Эффективные оценки

$\exists X_1, \dots, X_n$ – некотор. выборка с ф-цией правдоподоб $L(X, \Theta)$ относ некот. меры μ. Введем $\varphi(\Theta) = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) L(x, \Theta) \mu(dx) < \infty$, считая, что она диф. необход. число раз

$\exists (X_1, \dots, X_n)$ – некот выборка с ф-цией правдоподоб $L(X, \Theta)$ относ некот. меры μ, доминирующей рассматр. семейство распред

Введем ф-цию $\varphi(\Theta) = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) L(x, \Theta) \mu(dx) < \infty$, счит, что диф необх число раз

Опр: Ф-ция правдоподоб $L(X, \Theta)$ удовл. усл. регулярн для m-й произв., если $\exists$
$\frac{d^m \varphi(\Theta)}{d\Theta^m} = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) \frac{\partial^m}{\partial\Theta^m} L(x, \Theta) \mu(dx)$, причем мн-во $\{x : L(x, \Theta) > 0\}$ не завис от Θ

Опр: Ф-ция $U(X, \Theta) = \frac{\partial \ln L(X, \Theta)}{\partial\Theta}$ наз ф-цией вклада

Утв: Если ф-ция правдопод удовл. усл регулярности для 1-й производн., то $E_\Theta U(X, \Theta) = 0$.

▷ $E_\Theta U(X, \Theta) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, \Theta) L(x, \Theta) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \ln(x, \Theta)}{\partial\Theta} L(x, \Theta) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{L(x, \Theta)} \frac{\partial L(x, \Theta)}{\partial\Theta} L(x, \Theta) \mu(dx)$
$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial L(x, \Theta)}{\partial\Theta} \mu(dx) = \{\text{регулярн}\} = \frac{\partial}{\partial\Theta} \int_{\mathbb{R}^n} L(x, \Theta) \mu(dx) = \frac{\partial}{\partial\Theta} 1 = 0$

Из этого: для регуляр. моментов: $D_\Theta U(X, \Theta) = E_\Theta U^2(X, \Theta)$.

Посчит дисперс. вклада:
$D_\Theta U(X, \Theta) = D_\Theta \frac{\partial \ln L(X, \Theta)}{\partial\Theta} = D_\Theta \frac{\partial \ln \prod f_\Theta(X_i)}{\partial\Theta} = D_\Theta \frac{\partial \sum \ln f_\Theta(X_i)}{\partial\Theta} = D_\Theta \sum \frac{\partial \ln f_\Theta(X_i)}{\partial\Theta} =$
$= \{\text{независ. выборки}\} = \sum D_\Theta \frac{\partial \ln f_\Theta(X_i)}{\partial\Theta} = \{\text{однор. выб}\} = nD_\Theta \frac{\partial \ln f_\Theta(X_1)}{\partial\Theta} =$
$= nD_\Theta U(X_1, \Theta) = n\, i_1(\Theta)$, где $i_1(\Theta)$ – дисперс ф-ции вклада от выборки из одного эл-та □

Опр: Пусть $X=(X_1,\dots,X_n)$ – выборка объема n. Величину $i_n(\theta)=D_\theta U(X,\theta)$ наз фишеровской информацией, содерж в выборке разм n.

Нер-во Рао-Крамера: Пусть $(X_1,\dots,X_n)$ – выборка $L(X,\theta)$ удовлетвор условиям регулярности для 1-й производ. и $\tau(\theta)$ – диф ф-ция θ. Тогда:

1) $\forall T(X)$ – несмещ. оценки $\tau(\theta)$, справедливо нер-во:

$$D_\theta T(X) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{n i_n(\theta)} = \frac{(\tau'(\theta))^2}{D_\theta U(X,\theta)} \quad \forall \theta \in \Theta$$

2) Р-во достиг $\Leftrightarrow \exists a_n(\theta): T(X)-\tau(\theta)=a_n(\theta)\cdot U(X,\theta)$

▷ Из усл. регулярности $L(X,\theta)$:

$$\int L(x,\theta)\mu(dx)=1 \Rightarrow \int \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}=0$$

$$\int T(x)L(x,\theta)\mu(dx)=E_\theta T(X)=\tau(\theta) \Rightarrow \int T(x)\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}\mu(dx)=\tau'(\theta)$$

Заметим: $\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}\cdot L(x,\theta)$. Откуда следует:

$$\int U(x,\theta)L(x,\theta)\mu(dx)=0 \Leftrightarrow E_\theta[U(X,\theta)]=0$$

$$\int T(x)U(x,\theta)L(x,\theta)\mu(dx)=\tau'(\theta) \Leftrightarrow E_\theta[T(X)U(X,\theta)]=\tau'(\theta)$$

Вычитаем 1-е из 2-го, умнож на $\tau(\theta)=E_\theta[T(X)]$:

$$E_\theta[T(X)U(X,\theta)]-E_\theta[T(X)]E_\theta[U(X,\theta)]=\tau'(\theta)-0\cdot\tau(\theta)=\tau'(\theta).$$

В л.ч стоит ковариация сл. вел. $T(X)$ и $U(X,\theta)$: $\mathrm{cov}_\theta(T(X),U(X,\theta))=\tau'(\theta)$

Из нер-ва Коши-Буняковского: $(\tau'(\theta))^2=\mathrm{cov}_\theta^2(T(X),U(X,\theta))\leq D_\theta T(X) D_\theta U(X,\theta)=D_\theta T(X) n i_1(\theta)$

что равнос п.1 теор: $D_\theta T(X)\geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{n i_1(\theta)}$

Р-во достиг, если стат и ф-ция вклада лин. связаны:

$T(X)=\varphi(\theta)U(X,\theta)+\psi(\theta) \Rightarrow \tau(\theta)=\psi(\theta),\ a_n(\theta)=\varphi(\theta)$ □

Опр: Эффективная оценка $T(X)$ – это несмещ. оценка параметра θ (или ф-ция $\tau(\theta)$), дисперсия, которой совпад с ниж границей в нер-ве Рао-Крамера

① Характерестические ф-ции и их св-ва

Опр: Хар. ф-ция случ величины ξ – ф-ция $\varphi_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = E\cos(t\xi) + iE\sin(t\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_\xi(x)$, где

инт справа — инт. Фурье-Стильтьеса

Для абсолютно непр. распр: $\varphi_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$

Для дискр: $\varphi_\xi(t) = \sum e^{itx_i} \mathbb{P}(\xi = x_i)$

Св-ва:

1) Хар. ф-ция $\exists$ для $\forall$ сл. вел ξ

2) $\forall \xi$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$

3) a) $|\varphi_\xi(t)| = |Ee^{it\xi}| \leq 1$

   b) $\varphi_\xi(0) = 1$

   c) $\overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

   Следствие: Если хар. ф-ция вещ, то она явл. чётной

4) Если случ вел. ξ и η независ, то $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$

5) Хар. ф-ция равном. непрер.

6) Если $\exists$ абс. момент k-го порядка $E|\xi|^k < \infty$, $k \geq 1$, то $\exists$ непр k-я производ хар. ф-ции: $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi_\xi(t)\Big|_{t=0} = i^k E\xi^k$

Если $\exists$ непр. производ хар ф-ции порядка $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, то $\exists$ абс. момент порядка $k = 2n$: $E|\xi|^k = E\xi^k$ ($\Rightarrow$ и все предыд) и его можно вычисл по той же формуле

7) Хар ф-ция сл. вел ξ однозн опр её ф-цию распр $F_\xi(x)$. Ряд распр или плотн. восстанавливаются по хар ф-ции с помощью преобр. Фурье: $\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\varphi_\xi(t)dt$, $k \in \mathbb{Z}$

Абс непр. распр: $f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_\xi(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$

8) $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi \Leftrightarrow \varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_\xi(t)$ (теор Леви о непрерыв. соотв.)

▷ 1) $\exists$ хар. ф-ции $\Leftrightarrow$ равн. сход. соотв. инт. Док-во по призн Вейерштрасса:

$|\varphi_\xi(t)| = |\int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{itx}| dF(x) = \int_{\mathbb{R}} dF(x) = 1$

2) $\varphi_{a\xi+b}(t) = Ee^{it(a\xi+b)} = e^{itb}Ee^{ita\xi} = e^{itb}\varphi_\xi(at)$

3) Нер-во доказ в п.1., р-во (b) очев.

$\varphi_\xi(-t) = E\cos(-t\xi) + iE\sin(-t\xi) = E\cos(t\xi) - iE\sin(t\xi) = \overline{\varphi_\xi(t)}$. Ост. р-ва след и 2 св-ва

4) $\varphi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = \{$независ$\} = Ee^{it\xi}Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$

5) Возьмем сколь угодно малое $\varepsilon>0$. Разн. знач хар. ф-ции в т. t и $t+h$:

$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = \left|\int_{\mathbb{R}}(e^{i(t+h)x}-e^{itx})dF(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{itx}(e^{ihx}-1)dF(x)\right| \le \int_{\mathbb{R}}|e^{ihx}-1|dF(x) =$

$= \int_{\mathbb{R}}|e^{ihx}-1|dF(x) + \int_{\mathbb{R}}|e^{ihx}-1|dF(x)$

Возьмем настолько больш. R: $\mathbb{P}(|x|>R)<\frac{\varepsilon}{4}$. Т.к $|e^{ihx}-1|\le 2$, второй интеграл не превосх по вел $\varepsilon/2$. Выберем h наст. маленьким, чтоб $|e^{ihx}-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall |x|<R$

Тогда и 1-й инт $<\varepsilon/2$ $\Rightarrow$ по задан $\varepsilon>0$ подобрано $h>0$: $|\varphi(t+h)-\varphi(t)|<\varepsilon$ $\forall t\in\mathbb{R}$

6) Если $\exists\, E\xi^k<\infty, k\ge1$, то $\forall m=\overline{1,k}$ $\exists\, E\xi^m<\infty$. $\Rightarrow \left|\int_{\mathbb{R}}(ix)^m e^{itx}dF(x)\right| \le \int_{\mathbb{R}}|x|^k dF(x) =$

$= E|\xi|^m<\infty$ $\forall m=\overline{1,k}$. Т.е инт $\int_{\mathbb{R}}(ix)^m e^{itx}dF(x)$ сход равном по t $\Rightarrow$ диф по t можно мен. с интегрированием, откуда:

$\varphi_\xi^{(m)}(t) = i^m\int_{\mathbb{R}}x^m e^{itx}dF(x)$, $\varphi_\xi^{(m)}(0) = i^m\int_{\mathbb{R}}x^m dF(x) = i^m E\xi^m$

$\exists$ у хар ф-ции $\exists$ непр. производ четн. порядка k. Хар. ф-ция и её производ непр, ф-ция e^{itx} бесконечно диф по t, и можно показать, что при этих условиях можно помен. знаки интегрир и диф. местами. Тогда $\varphi^{(k)}(0) = i^k E\xi^k e^{itx}\big|_{t=0} = i^k E\xi^k = \int_{\mathbb{R}}x^k dF(x)$

$x^k\ge0$ в силу четн k $\Rightarrow$ этот инт сх абс $\Rightarrow \exists$ искомое мат ожид $\square$

② Точечная оценка. Несмещенность, состоятельность, оптимальность. Теор о единственности оптимальной оценки.

Опр: Статистика или оценка $T(X)$ – измеримая ф-ция от выборки

Опр: Несмещ. оценка парам θ – стат $T(X)$: $\forall\theta\in\Theta$: $E_\theta T(X)=\theta$

Обозн $T_n(X)=T(X)$, чтоб подчеркн. зависим. от объема

Опр: Ассимпт несмещ. оценка парам θ – стат. $T_n(X)$: $\forall\theta\in\Theta$: $E_\theta T_n(X)\xrightarrow[n\to\infty]{}\theta$

Опр: Состоят. оценка парам. θ – стат. $T_n(X)$: $\forall\theta\in\Theta$: $T_n(X)\xrightarrow[n\to\infty]{P}\theta$

Опр: Оптим. оценка парам θ – стат. $T^*(X)$:

1) $T^*\in T$, т.е T^* – несмещ.

2) T^* имеет равномерно миним. дисперсию ($\forall$ несм. $T_1\in T$: $D_\theta T^*\le D_\theta T_1$)

Утв: Если $\exists$ оптим оценка парам θ, то она единств.

▷ $\exists$ $\exists$ две оптим оценки $T_1(X)$ и $T_2(X)$ парам θ. Тогда в силу их несмещ.: $E_\theta T_1(X) = E_\theta T_2(X) = T(X)$, а в силу того, что они имеют равном. мин. дисп. $D_\theta T_1(X) = D_\theta T_2(X)$ $\forall\theta\in\Theta$

Введем новую стат: $T_3(X) = \frac{T_1(X)+T_2(X)}{2}$

Тк $E_\Theta T_3(X) = \frac{E_\Theta T_1(X) + E_\Theta T_2(X)}{2} = \Theta$, то $T_3(X)$ - несмещ. оц. парам. Θ. Также:

$D_\Theta T_3(X) = \frac{D_\Theta(T_1(X)+T_2(X))}{2^2} = \frac{D_\Theta T_1(X) + D_\Theta T_2(X) + 2\operatorname{cov}(T_1(X) T_2(X))}{4}$.

По св-вам ковариации: $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)| \le \sqrt{D_\Theta \xi D_\Theta \eta} \Rightarrow$

$D_\Theta T_3(X) \le \frac{D_\Theta T_1(X) + D_\Theta T_2(X) + 2\sqrt{D_\Theta T_1(X)}\sqrt{D_\Theta T_2(X)}}{4} = D_\Theta T_1(X)$

Т.к $T_1(X)$ и $T_2(X)$ — опт, дисп. $T_3(X)$ не может быть меньше дисп. $T_1(X)$

$\Rightarrow$ нер-во $\to$ р-во, но тогда $T_1(X) = aT_2(X) + b \Rightarrow E_\Theta T_1(X) = aE_\Theta T_2(X) + b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Theta = a\Theta + b \quad \forall \Theta \in \Theta \Rightarrow a=1, b=0 \quad \square$

① Случ. велич. Порожд. и индуцир. вероятн. пр-во. Ф-ция распред, её св-ва.

Опр: Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$ – σ-алг, порожд мн-вом всех откр. интервалов на $\mathbb{R}$ (мин. σ-алг., содерж все открытые инт). Элем. $B \in \mathcal{B}$ – борелевское мн-во

Опр: Борелевская ф-ция – ф-ция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$\forall B \in \mathcal{B} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$$

Опр: Пусть $\mathcal{F}$ – σ-алгебра на некотор непуст мн-ве Ω. Ф-ция $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ наз *измеримой относ σ-алг. $\mathcal{F}$*, если полн. прообраз борел. мн-ва B лежит в $\mathcal{F}$:
$$\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Опр: Пара $(X, \mathcal{U})$, где X – произв мн-во, а $\mathcal{U}$ – σ-алг. над ним – *измерим пр-во*. Эл-ты σ-алг. $\mathcal{U}$ наз *измерим. мн-вами*

Опр: Пусть измерим. пр-ва $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Тогда измеримая относ. $\mathcal{F}$ ф-ция $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ наз *случ величиной*

Утв: Пусть ξ – сл. велич., $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борел. ф-ция. Тогда $g(\xi)$ – сл. вел

▷ Сл. вел, если $\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}$

Расс прообр. произв. борел мн-ва для $\eta = g(\xi)$: $\eta^{-1}(B) = \{\omega : g(\xi(\omega)) \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in g^{-1}(B)\}$

g – борел. $\Rightarrow g^{-1}(B) = C$ – тоже борел. ξ – сл. вел и $C \in \mathcal{F} \Rightarrow$

$\eta^{-1}(B) = \{\omega : g(\xi(\omega)) \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}$

Получ, что прообр произв борел мн-ва прин σ-алг $\Rightarrow \eta = g(\xi)$ – сл. вел □

Утв: Пусть $\mathcal{E}$ – класс подм-в $\mathbb{R}$, $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$ (напр, $\mathcal{E}$ – класс интервалов)

Тогда ξ – сл. вел $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E}: \xi^{-1}(E) \in \mathcal{F}$

▷ ($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{D} = \{D : D \in \mathcal{B}, \xi^{-1}(D) \in \mathcal{F}\}$. Тогда $\mathcal{E} \in \mathcal{D}$. В силу св-в прообр и сл. вел ξ:

$\xi^{-1}(\cup A_i) = \cup \xi^{-1}(A_i)$, $\xi^{-1}(\overline{A}) = \overline{\xi^{-1}(A)}$, $\xi^{-1}(\cap A_i) = \cap \xi^{-1}(A_i) \quad \forall A_i \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow \mathcal{D}$ – σ-алг, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{D}$

($\Rightarrow$) След из опр сл. вел, тк $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$ □

Опр: σ-алг, порожд сл. вел ξ: $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$.

Опр: Вероятн. пр-во $(\Omega, \mathcal{F}_\xi, \mathbb{P})$ наз порожден. сл. велич. ξ

Опр: Распр сл. вел ξ – ф-ция $P_\xi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$: $P_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\xi \in B)$

Опр: Вер. пр-во $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_\xi)$ наз индуцированным сл. вел. ξ

Опр: Ф-ция распр $F_\xi(x)$ сл. вел ξ — ф-ция $F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$F_\xi(x) = P_\xi((-\infty, x)) = \mathbb{P}(\xi < x)$$

Св-ва ф-ции распр:

1) $\forall x \quad 0 \le F_\xi(x) \le 1$
2) $x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2) \quad \forall x_1, x_2$ (монот. неуб.)
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$
4) $F_\xi(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$ (непр. слева)

▷ 1) След из св-в вероят

2) $x_1 < x_2 \Rightarrow \{\xi < x_1\} \subseteq \{\xi < x_2\}$. Из монот вероят:

$F_\xi(x_1) = \mathbb{P}(\xi < x_1) \le \mathbb{P}(\xi < x_2) = F_\xi(x_2)$

3) lim $\exists$ в силу монот и огр $F_\xi(x)$. Докажем $F_\xi(-n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Δ посл влож. событ $B_n = \{\xi < -n\}$, $B_{n+1} = \{\xi < -(n+1)\} \subseteq B_n = \{\xi < -n\}$ $n \ge 1$

$\cap B_j = \{\omega : \xi(\omega) < x, \forall x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \cap B_j = \varnothing$

$F_\xi(-n) = \mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(B) = 0$ (в силу непр. вер. меры) $\Rightarrow$

$F_\xi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Leftrightarrow 1 - F_\xi(n) = \mathbb{P}(\xi \ge n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

4) Дост. показ, что $F_\xi(x_0 - \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x_0)$. Это равносильно:

$F_\xi(x_0) - F_\xi(x_0 - \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(\xi < x_0) - \mathbb{P}(\xi < x_0 - \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(x_0 - \frac{1}{n} \le \xi < x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Δ посл мн-в $B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \le \xi < x_0\}$

$B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$; $\bigcap\limits^{n} B_k = B_n$; $\bigcap\limits^{\infty} B_k = \varnothing$. В силу непр. вер меры:

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap\limits^{n} B_k) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ □

2 Ф-ция правдоподоб. Дост. стат, полн. стат. Теор факторизац.

В завис от типа семейства распр $\mathcal{P}_\Theta$, обозн через $f_\theta(y)$:

$$f_\theta(y) = \begin{cases} \text{плотн } f_\theta(y), & \text{если } \mathcal{P}_\theta \text{ абс непр} \\ P_\theta(X_1 = y), & \text{если } \mathcal{P}_\theta \text{ дискр.} \end{cases}$$

Опр: Ф-ция правдоподобия выборки X:

$$L(X, \theta) = f_\theta(X_1) \cdot \ldots \cdot f_\theta(X_n) = \prod f_\theta(X_i)$$

В дискрет случае:

$$L(X, \theta) = \prod f_\theta(X_i) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

Опр: Достат. стат — стат $T(X)$: $\forall t \in \mathbb{R}^m$, $\forall B \in \mathcal{B}^n$ усл. распредел

$\mathbb{P}_\theta((X_1, \ldots X_n) \in B \mid T = t)$ не завис от θ (Дост, если $E_\theta(X \mid T(X))$ не завис от θ.

Крит. факторизации: $T(X)$ – дос $\Leftrightarrow$ её ф-ция правдоп. предст в виде:

$$L(X_1, \dots, X_n, \theta) \overset{\text{п.н.}}{=} g(T(X), \theta) \cdot h(X)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\exists T(X)$ – дост. Возьмем произв. реализ выборки x. $\exists t = T(x)$.

Тогда $L(x, \theta) = \mathbb{P}_\theta(X = x) = \mathbb{P}_\theta(X = x, T(X) = t) = \underbrace{\mathbb{P}_\theta(T(X) = t)}_{g(T(X), \theta)} \underbrace{\mathbb{P}_\theta(X = x \mid T(X) = t)}_{h(X)}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists$ ф-ция правдоп имеет вид: $L(x, \theta) = g(T(x), \theta) h(x)$.

Тогда, если $x : T(x) = t$, то

$$\mathbb{P}_\theta(X = x \mid T(X) = t) = \frac{\mathbb{P}_\theta(X = x, T(X) = t)}{\mathbb{P}_\theta(T(X) = t)} = \frac{\mathbb{P}_\theta(X = x)}{\sum\limits_{x' : T(x') = t} \mathbb{P}_\theta(X = x')} =$$

$$= \frac{g(t, \theta) h(x)}{\sum\limits_{x' : T(x') = t} g(t, \theta) h(x')} = \frac{h(x)}{\sum h(x')}$$ – не зав. от $\theta \Rightarrow T(X)$ – достат $\square$

① Дискретн, сингуляр и абс непрер ф-ции распр и сл. вел. Плотность распр. Теор. Лебега о разл. ф-ции распр

Опр: Распр. ξ наз дискретным, если $\exists$ не более чем счётное мн-во B, в т.ч. $P_\xi(B)=1$. Дискр. ф-ция распр. имеет вид:

$$F_\xi(x)=\mathbb{P}(\xi<x)=\sum_{x_i<x} p_i=\sum_{x_i<x}\mathbb{P}(\xi=x_i)$$

Опр: Распр ξ наз абс. непрер, если $\exists\ f(x)\overset{\text{п.н.}}{\geq}0$: $\forall$ борел мн-ва B справедл:
$P_\xi(B)=\int_B f(x)\lambda(dx)$, где $f(x)$ - плот. распр, λ - мера Лебега. Абс. непр. ф-ция распр: $F_\xi(x)=\mathbb{P}(\xi<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Св-ва плотности:

1) $f_\xi(x)=\frac{d}{dx}F(x)$ почти всюду (кроме, м.б., мн-ва меры нуль по Лебегу - напр, ф-ция распр $U_{[0,1]}$ в т. 0 и 1 не диф)
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt=1$ (нормировка)

▷ 1) Очев из св-в инт с перемен. верх пред.
2) Если в опр. абс непрер. распр в кач-ве борел мн-ва взять всю прямую, то $\mathbb{P}(\xi\in\mathbb{R})=1=\int_{\mathbb{R}} f_\xi(t)dt$ □

Опр: Точка роста функц. распр $F_\xi(x)$ - точка x_0, для котор. верно: $\forall\varepsilon>0\quad F_\xi(x_0+\varepsilon)-F_\xi(x_0-\varepsilon)>0$

Опр: Ф-ция распр. $F_\xi(x)$ наз сингулярной, если она непрер. и мн-во точек её роста имеет нулевую меру Лебега

Теор Лебега о разлож ф-ции распред. Пусть ξ - случ. велич с ф-цией распр $F_\xi(x)$. Тогда $\exists!$ 3 ф-ции распр $F_{ac}(x)$, $F_s(x)$, $F_d(x)$, абс непрер, сингулярн и дискретн. соотв., а также 3 числа: $p_1,p_2,p_3\geq 0$, $p_1+p_2+p_3=1$: $F_\xi(x)=p_1F_{ac}(x)+p_2F_s(x)+p_3F_d(x)$

② Теор Рао - Блекуэлла - Колмогорова

Если $\exists$ оптим оценка для $\tau(\theta)$, то она явл ф-цией от достаточн. статистики

▷ Докажем более сильное утв.:

$\forall$ несмещ оценки можно построить новую оценку, являющуюся ф-цией от достат. стат, при этом дисперсия постр. оценки будет не больше исходной

1) Построим искомую статистику. $\exists T(X)$ – достат. статистика

$T_1(X)$ – несмещ оценка $\tau(\theta) \Rightarrow E_\theta T_1(X) = \tau(\theta)$

$\exists H(T) = E_\theta(T_1|T) \Rightarrow E_\theta H(T) = ET_1 = \tau(\theta) \Rightarrow H$ – несмещ $\tau(\theta)$

2) Покажем, что ее $D_\theta \leq D_\theta$ (исход):

$D_\theta T_1 = E_\theta(T_1 - E_\theta T_1)^2 = E_\theta(T_1 - \tau(\theta) + H(T) - H(T))^2 = \underbrace{E_\theta(T_1 - H(T))^2}_{\geq 0} +$

$+ 2E_\theta\underset{(*)}{((T_1 - H(T))(H(T) - \tau(\theta)))} + D_\theta H(T)$

$(*)$: $E_\theta[(T_1 - H(T))(H(T) - \tau(\theta))] = E_\theta(E_\theta[(T_1 - H(T))(H(T) - \tau(\theta))|T]) =$

$= E_\theta((H(T) - \tau(\theta))(E_\theta(T_1|T) - E_\theta(H(T)|T)) = 0 \Rightarrow D_\theta T_1 \geq D_\theta H(T) \Rightarrow$ если

$\exists$ опт. оценка T_1, то $H(T)$ – тоже опт оценка, но она единственно

$\Rightarrow H(T) = E_\theta(T_1|T) = f(T)$ ф-ция от дост статистики $\square$

① Моменты случ. величин. Их св-ва

Опр: Мат ожид сл. вел ξ наз число $E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$
При этом, если $E\xi < \infty$, то говорят, что мат ожидание $\exists$

Опр: Момент порядка k случ вел ξ наз $E\xi^k$

Опр: Центр. момент порядка k : $E(\xi - E\xi)^k$

Опр: Дисперсия — центр. момент 2-го порядка : $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$

* ещё что-то, но хз, что*

② Проверка гипотез. Лемма Неймана — Пирсона

Опр: Статистическая гипотеза H — $\forall$ предположение о распред наблюд. случ. величин

Опр: Гипотеза наз простой, если в ней явно задаётся одно (не параметриз) распределение. Напр: $H: X_i \sim N(0,1)$. В прот случае гипотеза наз сложной

Опр: Обычно $\exists$ сразу 2 взаимоискл. гипотезы. Одна — основная и обозн H_0; другая — альтерн. и H_1

Опр: Критерий — это статистика $\varphi(X)$ (т.е измеримая ф-ция от выборки) со зн. из $[0,1]$. Трактуется как "вероятность" отвергнуть H_0. Если $\varphi(X) \overset{\text{т.н}}{\in} \{0,1\}$, то кр. наз нерандомиз, иначе - рандомиз.

Опр: Говорят, что произошла ошибка 1-го рода (false-positive), если крит. отверг. верн. гипот H_0. Вероятн. ош. 1-го рода:
$\alpha(S) = P_\Theta(X \in S | H_0) = P0(X \in S)$
Аналогично вероятн ош. 2-го рода (false negative)
$\beta(S) = P_\Theta(X \notin S | H_1) = P1(X \notin S)$

Опр: Критер. наз несмещ, если выполн усл.: $1 - \beta(S) \geq \alpha(S)$

Опр: Мощность критерия: $W(\Theta, \varphi) = E_\Theta \varphi(X) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) L(x, \theta) dx$

Лемма Неймана-Пирсона:

$\exists\, \alpha_0 \in (0,1)$. $\exists\, l(X) = \frac{L_1(X)}{L_0(X)}$ $\Rightarrow$ при фикс вероятн ошиб 1-го рода α_0 наиб. мощ. критерий (НМК) имеет вид:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } l(X) > C \\ \varepsilon, & \text{если } l(X) = C \\ 0, & \text{если } l(X) < C \end{cases}$$

, где конст. C и ε явл. реш. ур-я "вероятн. ош. 1-го рода для этого крит. равна α_0": $\alpha(\varphi^*) = \alpha_0$

① Покажем, что C и ε м.б. найдены из ур-я $\alpha(\varphi^*) = \alpha_0$. Заметим:

$\alpha(\varphi^*) = P_0(l(X) > C) + \varepsilon P_0(l(X) = C)$

Отнош правдоподобн. $l(X)$ - случ. величина. $\exists\, \eta = l(X)$.

$\exists\, F_{\eta, H_0}(x)$ - ф-ция распред этой велич. в предпол, что H_0 верно.

Тогда $\alpha(\varphi^*) = 1 - F_{\eta,H_0}(C) + \varepsilon(F_{\eta,H_0}(C) - F_{\eta,H_0}(C-0))$

$\exists\, g(C) = 1 - F_{\eta,H_0}(C)$. Константу C_{α_0} можно выбр. так, чтоб было выполнено: $g(C_{\alpha_0}) \le \alpha_0 \le g(C_{\alpha_0} - 0)$

Тогда:

$$\varepsilon_{\alpha_0} = \begin{cases} 0, & \text{если } g(C_{\alpha_0}) = g(C_{\alpha_0} - 0) \\ \frac{\alpha_0 - g(C_{\alpha_0})}{g(C_{\alpha_0} - 0) - g(C_{\alpha_0})} \in [0,1], & \text{если } g(C_{\alpha_0}) < g(C_{\alpha_0} - 0) \end{cases}$$

В обоих случ. выполн: $\alpha_0 = g(C_{\alpha_0}) + \varepsilon_{\alpha_0}(g(C_{\alpha_0} - 0) - g(C_{\alpha_0})) = \alpha(\varphi^*)$

② Докажем, что $\varphi^*(x)$ - наиб. мощный критерий.

Выберем $\forall$ др. критерий $\tilde{\varphi}(x)$: $\alpha(\tilde{\varphi}) \le \alpha_0$ и сравн ее с критер. $\varphi^*(x)$. Заметим, что $\forall\, x$ справедл. нер-во:

$$(\varphi^*(x) - \tilde{\varphi}(x))(L_1(x) - C_{\alpha_0} L_0(x)) \geqslant 0$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*(x) - \tilde{\varphi}(x))(L_1(x) - C_{\alpha_0} L_0(x))\, dx \geqslant 0$$

Раскроем скобки и преобразуем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(x) L_1(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(x) L_1(x)\, dx \geqslant C_{\alpha_0}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(x) L_0(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(x) L_0(x)\, dx\right) \geqslant 0$$

Верно т.к. $\alpha(\tilde{\varphi}) \le \alpha_0 = \alpha(\varphi^*)$ $\Rightarrow$ $W(\theta_1, \varphi^*) - W(\theta_1, \tilde{\varphi}) \geqslant C_{\alpha_0}(\alpha(\varphi^*) - \alpha(\tilde{\varphi})) \Rightarrow$

$\Rightarrow W(\theta_1, \varphi^*) \geqslant W(\theta_1, \tilde{\varphi})$ $\square$

① Условное мат ожидание

$\measuredangle$ вер. пр-во $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $\exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ – некотор. σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$

Опр: Случ вел η наз $\mathcal{A}$-измеримой, если $\forall B \in \mathcal{B}$ $\eta^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

Опр: Условн. мат ожид случ вел ξ относ σ-алг $\mathcal{A}$ наз сл. вел $E(\xi|\mathcal{A})$:

1) $E(\xi|\mathcal{A})$ – $\mathcal{A}$ измерима
2) $\forall$ соб. $C \in \mathcal{A}$ $E[E(\xi|\mathcal{A}) I(C)] = E[\xi I(C)]$

Опр σ-алг. $\mathcal{A}$ наз порожд сл. вел η, если $\mathcal{A} = \{\eta^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Обозн: $\mathcal{A} = \sigma(\eta)$

Опр: Усл. мат ож сл. вел ξ относ сл. вел η – условное мат ожид ξ относ σ-алг $\sigma(\eta)$: $E(\xi|\eta) \equiv E(\xi|\sigma(\eta))$

Св-ва:

1) Линейность: $E(\alpha\xi + b\varsigma|\mathcal{A}) \overset{п.н}{=} a E(\xi|\mathcal{A}) + b E(\varsigma|\mathcal{A})$
2) Если ς – $\mathcal{A}$-изм. случ вел., то $E(\xi \cdot \varsigma|\mathcal{A}) = \varsigma E(\xi|\mathcal{A})$
   В частн: $\measuredangle$ усл мат ожид отн сл. вел η и $\exists \varsigma = f(\eta)$, где $f(x)$ – бор, то $E(\xi \cdot \varsigma|\eta) = \varsigma E(\xi|\eta)$
3) Если $E|g(\xi, \eta)| < \infty$, то $Eg(\xi, \eta) = E[E(g(\xi, \eta)|\eta|_{y=\eta}]$
4) Если ξ и η незав, то $E(\xi|\eta) = E\xi$
5) Взятие мат ожид "убир" условие: $E[E(\xi|\mathcal{A})] = E\xi$

② Оптимальность оценок, явлнющ. ф-цией полн достат стат.

Теор. Колмогорова: $\exists T(X)$ – полная достаточн. статистика. $\exists \varphi(x)$ – борелевская ф-ция и $E_\theta \varphi(T(X)) = \tau(\theta) \Rightarrow \varphi(T(X))$ – опт оц для $\tau(\theta)$

▷ Из теор Рао-Блекуэлла-Колмогорова:
Если $\exists$ несмещ. оценка $\tau(\theta)$, то $\exists$ и несмещ. оценка $\tau(\theta)$, явл ф-цией от дост. стат

$\exists T_1 = \varphi_1(T)$ – несмещ. для $\tau(\theta)$, T – ПДС; $\exists\exists T_2 = \varphi_2(T)$ – также несмещ. оц $\tau(\theta)$

$\Rightarrow ET_1 = \tau(\theta) = E(T_2) \Rightarrow E(\varphi_1(T) - \varphi_2(T)) = E(\varphi_1(T)) - E(\varphi_2(T)) = 0$

Но T – полн $\Rightarrow \varphi_1(T) \overset{п.н}{=} \varphi_2(T)$

$\Rightarrow T_1 = T_2$ – ед. несмещ. оц. $\Rightarrow$ оптим $\square$

① Совокупности сл. вел. Совместная ф-ция распред. Распред. ф-ций от сл. вел.

$\exists$ сл. вел $\xi_1, \dots, \xi_n$ заданы на одном вер пр-ве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Опр: Совместное распр. случ вел $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — ф-ция $\mathbb{P}: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(\xi \in B) = \mathbb{P}(\omega : (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in B), \quad B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Опр: Ф-ция совмест. распр сл. вел $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — ф-ция $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n)$$

Опр: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ зад n сл. вел

Я вектор (совокупн) сл. вел $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Будем Я только измерим. ф-ции. $\mathcal{B}^{(n)}$ — σ-алг. борел. мн-в в $\mathbb{R}^n$

Потребуем: $\xi^{-1}(B^{(n)}) \in \mathcal{A}$, $\forall B^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}$

Для измеримости $\xi \Leftrightarrow \forall \xi_i$ — сл. вел

$\Rightarrow$ Распределением вероятности ξ наз:

$$\mathbb{P}_\xi(B^{(n)}) = \mathbb{P}(\xi \in B^{(n)}) \cdot \mathbb{P}((\xi_1, \dots, \xi_n) \in B^{(n)}) \quad (*)$$

Если известно $(*)$, то также известно:

$$\mathbb{P}(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n), \quad B_i \in \mathcal{B}$$

② Доверительные интервалы. Метод центр. статистики

Опр: Доверит. инт. для парам θ с коэф доверия $\gamma \in (0,1)$ — инт $(T_1(X), T_2(X))$, где T_i — статистики:

1. $T_1(X) \overset{\text{п.н}}{\leq} T_2(X)$
2. $\mathbb{P}_\theta(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) \geq \gamma$

Опр: Центр. статистика — ф-ция $G(X, \theta)$:

1. $G(X, \theta)$ непр и строго монот по θ $\forall$ фикс реализ выборки x
2. $F_G(t) \equiv \mathbb{P}_\theta(G(X, \theta) < t)$ непр и не завис от θ

Построен. кратчайш доверит. инт с пом. центр. статистики.

1. Найдем $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}_\theta(g_1 \leq G(X, \theta) \leq g_2) = \gamma \quad \forall \theta \in \Theta \Leftrightarrow F_G(g_2 + 0) - F_G(g_1) = \gamma$
2. $\exists G(X, \theta) \nearrow$ по $\theta \Rightarrow \exists G^{-1}(X, g)$, $\begin{cases} G(X,\theta) \leq g_2 \\ G(X,\theta) \geq g_1 \end{cases} \Rightarrow$ можно найти $T_1(X), T_2(X)$:
$\begin{cases} T_2(X): G(X, T_2(X)) = g_2 \\ T_1(X): G(X, T_1(X)) = g_1 \end{cases} \Leftrightarrow T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X) \Rightarrow \mathbb{P}_\theta(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) \geq \gamma \quad \forall \theta \in \Theta$
3. $|G^{-1}(X, g_2) - G^{-1}(X, g_1)| = |T_2(X) - T_1(X)| \longrightarrow \min\limits_{F_G(g_2+0) - F_G(g_1) \geq \gamma}$

Опр: Центральн. довер. инт для пар θ с коэф. довер $\gamma \in (0,1)$ — инт $(T_1(X), T_2(X))$:

$$\mathbb{P}_\theta(T_1(X) > \theta) = \frac{1-\gamma}{2}; \quad \mathbb{P}_\theta(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) = \gamma; \quad \mathbb{P}_\theta(T_2(X) < \theta) = \frac{1-\gamma}{2}$$

Постр. довер. инт с пом. точечной оценки

1) $\exists T(X)$ – точечная стат. Θ. $\exists F_T(t,\Theta) = \mathbb{P}_\Theta(T(X) < t)$ – непр., строго монот

Найдем t_1 и t_2 такие: $\mathbb{P}_\Theta(t_1(\Theta) \leq T(X) < t_2(\Theta)) \geq \gamma$

$$\begin{cases} \mathbb{P}_\Theta(T(X) > t_2(\Theta)) \leq \frac{1-\gamma}{2} \\ \mathbb{P}_\Theta(T(X) < t_1(\Theta)) \leq \frac{1-\gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - F_T(t_2(\Theta), \Theta) \leq \frac{1-\gamma}{2} \\ F_T(t_1(\Theta), \Theta) \leq \frac{1-\gamma}{2} \end{cases}$$

2) Лемма (для абс. непр. случая): Если $F_T(t,\Theta) \nearrow (\searrow)$ по Θ, то $t_1(\Theta)$ и $t_2(\Theta) \searrow (\nearrow)$

$\triangleright$ Док-во для t_1 (для t_2 – аналогично): $\exists F_T(t,\Theta) \nearrow$. От противного:

$\exists \Theta_1 < \Theta_2$: $t_1(\Theta_1) \leq t_1(\Theta_2)$. $F_T(t,\Theta) \nearrow$ по Θ и $\forall$ ф-ция распр не уб по t:

$\frac{1-\gamma}{2} = F_T(t_1(\Theta_1), \Theta_1) < F_T(t_1(\Theta_1), \Theta_2) \leq F_T(t_1(\Theta_2), \Theta_2) = \frac{1-\gamma}{2}$ – противор. $\square$

3) $t_1(\Theta) < T(X) \Leftrightarrow \Theta > \varphi_1(T(X)) \Rightarrow \mathbb{P}_\Theta(\Theta > \varphi_1(T(X))) = \frac{1-\gamma}{2}$

$t_2(\Theta) > T(X) \Leftrightarrow \Theta < \varphi_2(T(X)) \Rightarrow \mathbb{P}_\Theta(\Theta < \varphi_2(T(X))) = \frac{1-\gamma}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}_\Theta(\underbrace{\varphi_2(T(X))}_{T_1(X)} \leq \Theta \leq \underbrace{\varphi_1(T(X))}_{T_2(X)}) = \gamma$, где $\varphi_1 = t_1^{-1}$, $\varphi_2 = t_2^{-1}$

① Независ. сл. вел. Крит. независимости

Опр: Сл. вел $\xi_1, \dots, \xi_n$ наз независ., если $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ вып

$$\mathbb{P}(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = \underbrace{\mathbb{P}(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\xi_n \in B_n)}_{\text{совм. ф-ция распр}}$$

Крит. независ: Сл. вел нез в совокуп $\Leftrightarrow F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \dots$

② Нер-во Рао-Крамера. Эффективные оценки

$\exists\, X_1, \dots, X_n$ — некотор. выборка с ф-цией правдоподоб $L(X, \theta)$ относ некот. меры μ. Введем $\varphi(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) L(x, \theta) \mu(dx) < \infty$, считая, что она диф. необход. число раз

$\exists\, (X_1, \dots, X_n)$ — некот выборка с ф-цией правдоподоб $L(X, \theta)$ относ некот. меры μ, доминирующей рассматр. семейство распред

Введем ф-цию $\varphi(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) L(x, \theta) \mu(dx) < \infty$, счит, что диф необх число раз

Опр: Ф-ция правдоподоб $L(X, \theta)$ удовл. усл. регулярн для m-й произв., если $\exists$

$\dfrac{d^m \varphi(\theta)}{d\theta^m} = \int_{\mathbb{R}^n} T(x) \dfrac{\partial^m}{\partial \theta^m} L(x, \theta) \mu(dx)$, причем мн-во $\{x : L(x, \theta) > 0\}$ не завис от θ

Опр: Ф-ция $U(X, \theta) = \dfrac{\partial \ln L(X, \theta)}{\partial \theta}$ наз ф-цией вклада

Утв: Если ф-ция правдопод удовл. усл регулярности для 1-й производн., то $E_\theta U(X, \theta) = 0$.

$\triangleright$ $E_\theta U(X, \theta) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, \theta) L(x, \theta) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \dfrac{\partial \ln(x, \theta)}{\partial \theta} L(x, \theta) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \dfrac{1}{L(x, \theta)} \dfrac{\partial L(x, \theta)}{\partial \theta} L(x, \theta) \mu(dx)$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \dfrac{\partial L(x, \theta)}{\partial \theta} \mu(dx) = \{\text{регулярн}\} = \dfrac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^n} L(x, \theta) \mu(dx) = \dfrac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0$

Из этого: для регуляр. моментов: $D_\theta U(X, \theta) = E_\theta U^2(X, \theta)$.

Посчит дисперс. вклада:

$D_\theta U(X, \theta) = D_\theta \dfrac{\partial \ln L(X, \theta)}{\partial \theta} = D_\theta \dfrac{\partial \ln \prod f_\theta(X_i)}{\partial \theta} = D_\theta \dfrac{\partial \sum \ln f_\theta(X_i)}{\partial \theta} = D_\theta \sum \dfrac{\partial \ln f_\theta(X_i)}{\partial \theta} =$

$= \{\text{независ. выборки}\} = \sum D_\theta \dfrac{\partial \ln f_\theta(X_i)}{\partial \theta} = \{\text{однор. выб}\} = n D_\theta \dfrac{\partial \ln f_\theta(X_i)}{\partial \theta} =$

$= n D_\theta U(X_1, \theta) = n\, i_1(\theta)$, где $i_1(\theta)$ — дисперс ф-ции вклада от выборки из одного эл-та $\square$

Опр: $\exists\, X = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка объема n. Величину $i_n(\theta) = D_\theta U(X, \theta)$ наз фишеровской информацией, содерж в выборке разм n.

Нер-во Рао-Крамера: $\exists(X_1,\dots,X_n)$ — выборка $L(X,\theta)$ удовлетвор условиям регулярности для 1-й производ. и $\tau(\theta)$ — диф ф-ция θ. Тогда:

1) $\forall T(X)$ — несмещ. оценки $\tau(\theta)$, справедливо нер-во:

$$D_\theta T(X) \geqslant \frac{(\tau'(\theta))^2}{n i_n(\theta)} = \frac{(\tau'(\theta))^2}{D_\theta U(X,\theta)} \quad \forall \theta \in \Theta$$

2) Р-во достиг $\Longleftrightarrow \exists a_n(\theta): T(X)-\tau(\theta)=a_n(\theta)\cdot U(X,\theta)$

▷ Из усл. регулярности $L(X,\theta)$:

$\int L(x,\theta)\mu(dx)=1 \Rightarrow \int \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta} = 0$

$\int T(x) L(x,\theta)\mu(dx) = E_\theta T(X) = \tau(\theta) \Rightarrow \int T(x)\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}\mu(dx) = \tau'(\theta)$

Заметим: $\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}\cdot L(x,\theta)$. Откуда следует:

$\int U(x,\theta)L(x,\theta)\mu(dx)=0 \Longleftrightarrow E_\theta[U(X,\theta)]=0$

$\int T(x)U(x,\theta)L(x,\theta)\mu(dx)=\tau'(\theta) \Longleftrightarrow E_\theta[T(X)U(X,\theta)]=\tau'(\theta)$

Вычитаем 1-е из 2-го, умнож на $\tau(\theta)=E_\theta[T(X)]$:

$E_\theta[T(X)U(X,\theta)] - E_\theta[T(X)]E_\theta[U(X,\theta)] = \tau'(\theta) - 0\cdot\tau(\theta) = \tau'(\theta)$.

В л.ч стоит ковариация сл. вел. $T(X)$ и $U(X,\theta)$: $cov_\theta(T(X),U(X,\theta))=\tau'(\theta)$

Из нер-ва Коши-Буняковского: $(\tau'(\theta))^2 = cov_\theta^2(T(X),U(X,\theta)) \leqslant D_\theta T(X) D_\theta U(X,\theta) = D_\theta T(X) n i_1(\theta)$

что равнос п.1 теор: $D_\theta T(X) \geqslant \frac{(\tau'(\theta))^2}{n i_1(\theta)}$

Р-во достиг, если стат и ф-ция вклада лин. связаны:

$T(X) = \varphi(\theta)U(X,\theta)+\psi(\theta) \Rightarrow \tau(\theta)=\psi(\theta),\ a_n(\theta)=\varphi(\theta)$ □

Опр: Эффективная оценка $T(X)$ — это несмещ. оценка параметра θ (или ф-ция $\tau(\theta)$), дисперсия, которой совпад с ниж гранью в нер-ве Рао-Крамера

① Усил. зак. больш. чисел для независ одинаково распр. сл. вел

$\exists\ \xi_1, \xi_2, \dots$ – послед незав. одинак. распр. сл. вел. $\exists\ E\xi_k = a < \infty$

Тогда: $\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ с вероятностью 1

▷ Введем послед сл. вел $\xi_n' = \begin{cases} \xi_n, & |\xi_n| \le n \\ 0, & |\xi_n| > n \end{cases}$, ξ_k' - незав

$E|\xi|^k = \int |\xi^k(\omega)| P(d\omega) < C^k$, $|\xi| < C$ почти всюду

$\exists\ \xi_n'' = \xi_n - \xi_n'$, $\xi_n = \xi_n' + \xi_n''$, $S_n = S_n' + S_n''$

$\Rightarrow \frac{S_n - ES_n}{n} = \frac{S_n'}{n} + \frac{S_n''}{n} - \frac{ES_n'}{n} - \frac{ES_n''}{n} = \frac{S_n' - ES_n'}{n} + \frac{S_n''}{n} - \frac{ES_n''}{n}$

1) $\xi_n'' = \xi_n - \xi_n'$, $(\xi_n'' \ne 0) \Leftrightarrow (\xi_n \ne \xi_n') \Leftrightarrow (|\xi_n'| = 0) \Leftrightarrow (|\xi_n| > n)$

$\Rightarrow \sum^{\infty} P(B_n) = \sum^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \sum^{\infty} P(|\xi_1| > n) = \sum_n^{\infty} \sum_m^{\infty} P(m < |\xi_1| \le m+1) =$

$= \sum_m^{\infty} m P(m < |\xi_1| < m+1)$ (*)

(*) $\le \int_\Omega |\xi_1(\omega)| P(d\omega) = E|\xi_1(\omega)| < \infty \Rightarrow$ только конеч число сл. вел отлич. от $0 \Rightarrow S_n'' \le C$, $ES_n'' \le C$

2) Докажем, что для ξ' вып УЗБЧ:

$D\xi_n' \le E(\xi_n')^2$. $\exists\ F(x) = P(\xi_n < x)$, $D\xi_n' \le E(\xi_n')^2 = \int_{-n}^{n} x^2 dF(x)$

$\sum_n^{\infty} \frac{D\xi_n'}{n^2} \le \sum_n^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{-n}^{n} x^2 dF(x) = \sum_n^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k<|x|\le k+1} x^2 dF(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{k-1<|x|\le k} x^2 dF(x)$

$\sum_n^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{C}{k}$, $x^2 \le k|x|$

$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{k-1<|x|\le k} x^2 dF(x) \le C \int_0^{\infty} |x| dF(dx) = CE|\xi_1| < \infty \Rightarrow \frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

◻

② Точечная оценка. Несмещенность, состоятельность, оптимальность. Теор о единственности оптимальной оценки.

Опр: Статистика или оценка $T(X)$ – измеримая ф-ция от выборки

Опр: Несмещ. оценка парам Θ – стат $T(X)$: $\forall \theta \in \Theta$: $E_\theta T(X) = \theta$

Обозн $T_n(X) = T(X)$, чтоб подчеркн. зависим. от объема

Опр: Ассимпт несмещ. оценка парам Θ – стат. $T_n(X)$: $\forall \theta \in \Theta$: $E_\theta T_n(X) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

Опр: Состоят. оценка парам. θ – стат. $T_n(X)$: $\forall \theta \in \Theta$: $T_n(X) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \Theta$

Опр: Оптим. оценка парам θ — стат. $T^*(X)$:

1) $T^* \in T$, т.е T^* — несмещ.

2) T^* имеет равномерно миним. дисперсию ($\forall$ несм. $T_1 \in T$: $D_\theta T^* \leq D_\theta T_1$)

Утв: Если $\exists$ оптим оценка парам θ, то она единств.

▷ Пусть $\exists$ две оптим оценки $T_1(X)$ и $T_2(X)$ парам θ. Тогда в силу их несмещ.: $E_\theta T_1(X) = E_\theta T_2(X) = T(X)$, а в силу того, что они имеют равном. мин. дисп. $D_\theta T_1(X) = D_\theta T_2(X)$ $\forall \theta \in \Theta$

Введем новую стат: $T_3(X) = \frac{T_1(X) + T_2(X)}{2}$

Т.к $E_\theta T_3(X) = \frac{E_\theta T_1(X) + E_\theta T_2(X)}{2} = \theta$, то $T_3(X)$ - несмещ. оц. парам. θ. Также:

$$D_\theta T_3(X) = \frac{D_\theta(T_1(X) + T_2(X))}{2^2} = \frac{D_\theta T_1(X) + D_\theta T_2(X) + 2\operatorname{cov}(T_1(X) T_2(X))}{4}.$$

По св-вам ковариации: $|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{D_\theta \xi D_\theta \eta}$ $\Rightarrow$

$$D_\theta T_3(X) \leq \frac{D_\theta T_1(X) + D_\theta T_2(X) + 2\sqrt{D_\theta T_1(X)}\sqrt{D_\theta T_2(X)}}{4} = D_\theta T_1(X)$$

Т.к $T_1(X)$ и $T_2(X)$ — опт, дисп. $T_3(X)$ не может быть меньше дисп. $T_1(X)$ $\Rightarrow$ нер-во $\rightarrow$ р-во, но тогда $T_1(X) = aT_2(X) + b \Rightarrow E_\theta T_1(X) = a E_\theta T_2(X) + b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = a\theta + b$ $\forall \theta \in \Theta$ $\Rightarrow a = 1, b = 0$ $\square$